Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 01.02.2018 -

---

1. Nel piano dotato di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $R(O,x,y)$, si condideri il sistema di riferimento cartesiano ortogonale $R'(O',x',y')$ contraverso ad R, ove $O'(-3,2)$ ed $x' : x+2y-1=0$ è orientata nel verso delle ordinate decrescenti. Si determinino le equazione del cambiamento di riferimento da R ad R' e viceversa.

La retta x' ha parametri direttori $(1,m)=(1,-\frac{1}{2}) \sim (2,-1)$. Segue che la retta y', ortogonale a x', ha parametri direttori $(1,2)$. Allora il versore di x' è $i'(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})$. Per il versore di y' si ha invece $j'(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\frac{2}{\sqrt{5}})$. Dal fatto che i due sistemi devono essere contraversi si ricava $j'(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$. Allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

...

2. In $\mathbb{R}^3$ costruire una base B contenente il vettore $(1,0,-1)$ e determinare le matrici del cambiamento di base da B alla base canonica e viceversa.

Ad es., si ottiene una base

$$B = \{(1,0,-1),(0,1,-0),(0,0,1)\}.$$

Si tratta solo di costruire le matrici

$$M_C^B(id) \quad \text{e} \quad M_B^C(id),$$

essendo $id : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. ...

3. Considerata la curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 - 4x = 0$$

studiarla nei suoi punti impropri e nel punto $P(2, 0)$.

I punti impropri della curva sono quelli delle rette di equazione complessiva

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 = x(x - y) = 0.$$

Pertanto $Y_\infty(0, 1, 0)$ e $P_\infty(1, 1, 0)$.
Passando a coordinate omogenee si ha

$$X^3 - 2X^2Y + XY^2 - 4XT^2 = 0.$$

Quindi:

- $F_X(X, Y, T) = 3X^2 - 4XY + Y^2 - 4T$,
- $F_Y(X, Y, T) = -2X^2 + 2XY$,
- $F_T(X, Y, T) = -8XT$.

Si ha:

$$\begin{aligned} F_X(Y_\infty) = 1 \quad F_Y(Y_\infty) = 0 \quad F_Y(Y_\infty) = 0, \\ F_X(P_\infty) = 0 \quad F_Y(P_\infty) = 0 \quad F_Y(P_\infty) = 0, \\ F_X(P) = 8 \quad F_Y(P) = -8 \quad F_Y(P) = -16. \end{aligned}$$

Allora i punti Y_∞ e P sono entrambi semplici con tangenti, rispettivamente: $x = 0$ e $x - y - 2 = 0$.
Il punto P_∞ è singolare. Per studiarne il grado si consideri la generica retta per esso, di equazione $y = x + k$ e la si intersechi con la curva. Si ottiene l'equazione

$$x^3 - 2x^2(x + k) + x(x + k)^2 - 4x = 0,$$

cioè

$$(k^2 - 4)x = 0.$$

Segue che P_∞ è doppio con tangenti che si ottengono per $k = \pm 2$.