Soluzioni Proposte della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE) del 1.07.2008

1. Considerata l' applicazione lineare

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3, \quad L(x, y, z) = (2x + y - z, 2y + z, -x + z)$$

verificare che essa è biiettiva e determinarne l'inversa.

Fissato un qualunque vettore $(a, b, c) \in \mathtt{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y - z = a \\ 2y + z = b \\ -x + z = c \end{cases}$$

è di Cramer. Esso ammette come unica soluzione la terna ordinata

$$(2a - b + 3c, -a + b - 2c, 2a - b + 4c).$$

Segue che l'applicazione data è biiettiva e che la sua inversa $L^{-1} : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ deve avere come legge quella data da

$$(a, b, c) \mapsto (2a - b + 3c, -a + b - 2c, 2a - b + 4c).$$

Allora $L^{-1}(x, y, z) = (2x - y + 3z, -x + y - 2z, 2x - y + 4z)$.

2. Determinare e classificare la conica tangente alla parabola di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 + 2xy + y^2 - 3x = 0$$

nel suo punto improprio e nell'origine e passante per $Q(1, 0)$.

Il punto improprio di $\mathcal{C}$ è $\mathrm{P}_\infty(1, -1, 0)$. La conica cercata appartiene al fascio di coniche bitangenti a $\mathcal{C}$ in P_∞ ed O. Tale fascio ha equazione

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x + k(x + y)^2 = 0,$$

essendo $x + y = 0$ l'equazione della retta $\mathrm{P}_\infty O$. Il passaggio per il punto Q fornisce il valore $k = 2$, quindi l'equazione della conica è

$$x^2 + 2xy + y^2 - x = 0,$$

che è evidentemente ancora una parabola.

3. Tra le rette r_k, $k \in \mathtt{R}$, di equazioni

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

determinare, se esiste, quella la cui proiezione ortogonale sul piano $\pi : 2x + y - 3z + 1 = 0$ è ortogonale al vettore $\mathbf{v}(1, 2, 1)$.

Il fascio di asse r_k ha equazione

$$x + kz + h(y - z - 1) = 0.$$

La condizione di ortogonalità del generico piano del fascio con π fornisce la relazione $4h - 3k + 2 = 0$, da cui $h = \frac{3k-2}{4}$. Segue che la proiezione ortogonale di r_k su π è la retta di equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 = 0 \\ 4x + (3k - 2)y + (k + 2)z - 3k + 2 = 0 \end{cases}$$

i cui parametri direttori sono $(10k - 4, -2k - 16, 6k - 8)$. Dovendo il vettore con tali componenti essere ortogonale a $\mathbf{v}$, si ottiene subito il valore $k = \frac{11}{3}$. Segue che la retta richiesta esiste ed è $r_{\frac{11}{3}}$.

4. Determinare il versore della retta per i punti $P(1, -1, 0)$ e $Q(2, 1, -1)$, orientata nel verso delle z crescenti.

Il vettore $\overline{PQ}$ ha componenti $(1, 2, -1)$ e quindi modulo $\sqrt{6}$. I due possibili versori della retta per P e Q sono quindi i vettori di componenti

$$\left(\frac{1}{\pm\sqrt{6}}, \frac{2}{\pm\sqrt{6}}, \frac{-1}{\pm\sqrt{6}}\right).$$

Dovendo la retta essere orientata nel verso delle quote crescenti, si dovrà scegliere il segno negativo a denominatore di ciascuna delle tre componenti. Allora il versore cercato è $\mathbf{u}(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.