FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

APPELLO DI GEOMETRIA DEL 01.07.2013

SUGGERIMENTI DI SOLUZIONE

---

1. Nel fascio di rette del piano $\pi : x + 2y - z + 3 = 0$ avente centro nel punto $C(-1, 1, 4)$, determinare se esiste una retta ortogonale ai piani $\sigma : 2x - y = 0$ e $\delta : x - y + 3z - 1 = 0$. Determinarne eventualmente il versore orientato in modo da formare un angolo ottuso con l'asse y.

L'equazione della stella di piani per C è $a(x+1)+b(y-1)+c(z-4) = 0$, allora il fascio cercato ha equazioni

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3 = 0 \\ ax + by + cz + a - b - 4c = 0 \end{cases} .$$

Tali rette hanno parametri direttori $(b + 2c, -a - c, -2a + b)$. Le condizioni di parallelismo con $\sigma(2, -1, 0)$ e $\delta(1, -1, 3)$ forniscono il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ 5a - 4b - 3c = 0 \end{cases} ,$$

il quale ha spazio di soluzioni di dimensione 1 : $S_0 =< (1, 2, -1) >$. Poichè $(1, 2, -1)$ sono anche i parametri di giacitura del piano π, si conclude che non esistono rette nelle condizioni volute.

2. Studiare la curva algebrica di equazionbe

$$xy^2 + y^3 - xy + x - 3y + 1 = 0$$

nei suoi punti impropri e nel punto $P(-1, 0)$.

I punti impropri della curva sono X_∞ e $P_\infty(1,-1,0)$. La generica retta per X_∞ ha equazione $y = k$. L'intersezione di questa con la curva fornisce l'equazione

$$(k^2 - k + 1)x + k^3 - 3k + 1 = 0.$$

Allora X_∞ è punto doppio isolato essendo le sue tangenti le rette immaginarie e coniugate di equazioni $y = (1 \pm \sqrt{3})x$. Gli altri due punti sono semplici come si vede facilmente.

3. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dopo aver verificato che la matrice A è invertibile, determinarne l'inversa. Determinare inoltre la matrice $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tale che

$$AC + B = \overline{0}.$$

La matrice A induce l'applicazione lineare

$$L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L_A(x,y,z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = (x+z, x+y+z, y+z).$$

Il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + z = a \\ x + y + z = b \\ y + z \end{cases}$$

ammette come soluzione la terna $(b-c, -a+b, a-b+c)$. Allora $L_A^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita da $L_A^{-1}(x,y,z) = (y-z, -x+y, x-y+z)$. Si ha

$$A^{-1} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L_A^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha poi

$$AC + B = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad AC = -B \quad \Rightarrow \quad C = A^{-1}(-B) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \dots$$