Dipartimento di di Ingegneria Civile e Ambientale

Corso di Laurea Ing.Civile

Appello di GEOMETRIA del 01.07.2014

Soluzioni proposte

---

1. Per $k \in \mathbb{R}$, sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L(x, y, z) = (x - 2kz, kx + y + z, 2kx + 2y + kz).$$

Determinare i valori di k per cui L risulta un isomorfismo e, nel caso, trovarne l'inverso. Determinare inoltre la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L)$, essendo $\mathcal{B}$ la base $\{(1, -1, 1), (2, 0, 2), (0, -1, -3)\}$ e $\mathcal{C}$ la base canonica.

L'applicazione è un isomorfismo esattamente quando la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2k \\ k & 1 & 1 \\ 2k & 2 & k \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, il che avviene per $k \neq 2$.
Per tali valori del parametro l'isomorfismo inverso L^{-1} si ottiene dalla risoluzione del sistema di Cramer

$$\begin{cases} x - 2kz = a \\ kx + y + z = b \\ 2kx + 2y + kz = c \end{cases}.$$

Allora

$$L^{-1}(x, y, z) =$$

$$= (\frac{(k-2)x - 4ky + 2kz}{k-2}, \frac{(2k - k^2)x + (k + 4k^2)y - (1 + 2k^2)z}{k-2}, \frac{-2y + z}{k-2}).$$

Per la seconda richiesta si ha

$$L(1, 0, 0) = (1, k, 2k) = \frac{-k-1}{3}(1, -1, 1) + \frac{4+k}{6}(2, 0, 2) + \frac{2-4k}{6}(0, -1, -3),$$

$$L(0,1,0) = (0,1,2) = -\frac{1}{3}(1,-1,1) + \frac{1}{6}(2,0,2) - \frac{2}{3}(0,-1,-3),$$

$$L(0,0,1) = (-2k,1,k) = (k-1)(1,-1,1) + \frac{1-3k}{2}(2,0,2) - k(0,-1,-3),$$

pertanto

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(L) = \begin{pmatrix} \frac{-k-1}{3} & -\frac{1}{3} & k-1 \\ \\ \frac{4+k}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1-3k}{2} \\ \\ \frac{2-4k}{6} & -\frac{2}{3} & -k \end{pmatrix}.$$

2. Considerata la retta r di equazioni

$$x - 2y + z - 2 = 0, \quad 3x + y + z + 1 = 0,$$

determinare, se esiste, la retta ortogonale a r e parallela al piano $\pi : 2x - 2y - 2z - 3 = 0$ per l'origine. Scrivere inoltre equazioni ridotte per r.

La retta r ha parametri direttori $(3,-2,-7))$ mentre il piano π ha parametri di giacitura $(1,-1,-1)$. Allora la retta cercata s ha parametri direttori (l,m,n) tali che

$$\begin{cases} 3l - 2m - 7n = 0 \\ l - m - n = 0 \end{cases}.$$

Si ricava $(l,m,n) = (9,10,1)$, infine l'equazione

$$s : \frac{x}{9} = \frac{y}{10} = z,$$

(in forma di rapporti uguali).
Il fascio di piani di asse la retta r ha equazione

$$(1+3\lambda)x + (\lambda-2)y + (1+\lambda)z + \lambda - 2 = 0.$$

Poichè r non è parallela al piano xy, si possono ottenere per essa equazioni del tipo

$$\begin{cases} x = lz + p \\ y = mz + q \end{cases},$$

in corrispondenza dei valori del parametro $\lambda = 2$ e $\lambda = -\frac{1}{3}$, quindi

$$\begin{cases} x = \frac{3}{7}z \\ \\ y = -\frac{2}{7}z - 1 \end{cases}.$$

3. Nel fascio di coniche tangenti alla retta $r : 2x - y + 3 = 0$ nel suo punto improprio e passanti per i punti $P(1, 1)$ e $Q(-2, 0)$ determinare eventuali iperboli equilatere.

Si costruisce il fascio di coniche tangenti alla retta r nel suo punto improprio $R_\infty(1, 2, 0)$ e passante per P e Q. Le coniche degeneri sono una costituita dalla retta r e dalla retta (PQ), l'altra dalle rette $(R_\infty P)$ e (PR_∞). Per ottenere l'iperbole richiesta basta imporre il passaggio per il punto $S_\infty(2, -1, 0)$ che indica la direzione ortogonale a quella data da R_∞.