Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 01.07.2015

---

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Posto

$$v_1' = v_1 + 2v_2 + v_3, \quad v_2' = v_1 + 7v_2 + 4v_3, \quad v_3' = -v_1 + v_2 + v_3,$$

provare che $B' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ è una base di V e determinare la matrice del cambiamento di base da B a B'. Se poi $v \in V$ e $v_B = (3, 2, 1)$, determinare v_B'.

Supponiamo data una relazione di dipendenza lineare

$$av_1' + bv_2' + cv_3' = \overline{0},$$

cioè

$$(a + b - c)v_1 + (2a + 7b + c)v_2 + (a + 4b + c)v_3 = \overline{0}.$$

Poichè B è una base i coefficienti di tale combinazione devono essere tutti nulli:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 7b + c = 0 \\ a + 4b + c = 0 \end{cases}.$$

Quest'ultimo è un sistema di Cramer, pertanto ammette l'unica soluzione $a = 0, b = 0, c = 0$. Quindi B' è una base.
Per determinare $M_{B'}^{B}(id_V)$ si devono esprimere i vettori di B sulla base B'. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 + v_3 = v_1' \\ v_1 + 7v_2 + 4v_3 = v_2' \\ -v_1 + v_2 + v_3 = v_3' \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione la terna

$$v_1 = 3v'_1 - v'_2 + v'_3,\ v_2 = -5v'_1 + 2v'_2 + v'_3,\ v_3 = 8v'_1 - 3v'_2 + 5v'_3.$$

Allora

$$M_{B'}^{B}(id_V) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} .$$

Si ha infine

$$v_{B'} = M_{B'}^{B}(id_V)v_B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (7, -2, 10).$$

2. Siano r la retta per $P(0, 7, 0)$, parallela al vettore $v(-1 - 5, 1)$ ed s la retta per $Q(-3, 0, 2)$, di parametri direttori $(3, 1, 1)$. Verificare che r ed s sono sghembe e determinare la loro minima distanza. Determinare inoltre i coseni direttori della retta PQ, orientata come il vettore $\overline{QP}$.

Si possono scrivere direttamente le equazioni parametriche delle due rette:

$$r : \begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 5t \\ z = t \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x = -3 + 3t' \\ y = t' \\ z = 2 + t' \end{cases} .$$

I generici punti delle due rette sono, rispettivamente,

$$R(-t, 7 - 5t, t) \in r, \quad \text{e} \quad S(-3 + 3t', t', 2 + t') \in s.$$

Imponendo che il vettore $\overline{RS} = (3t' + t - 3, t' + 5t - 7, t' - t + 2)$ sia ortogonale contemporaneamente a r ed s si ottiene:

$$-(3t' + t - 3) - 5(t' + 5t - 7) + (t' - t + 2) = 0$$

e

$$3(3t' + t - 3) + (t' + 5t - 7) + (t' - t + 2) = 0,$$

da cui ...
Per la seconda richiesta: $\overline{QP} = (-3, -7, 2)$ ha modulo pari a

$$\sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 2^2} = \sqrt{62},$$

pertanto il versore della retta cercata è

$$u = (\frac{-3}{\sqrt{62}}, \frac{-7}{\sqrt{62}}, \frac{2}{\sqrt{62}}),$$

le cui coordinate sono i suoi coseni direttori.

3. Nel fascio di coniche tangenti alla retta $r : x - 5 = 0$ in $R(5, 1)$ e passanti per $P(3, 0)$ e $Q(1, 2)$, determinare eventuali parabole per l'origine.

Consideriamo il fascio di coniche tangenti a r in R e passanti per P e Q:

$$\mathcal{F} : (x + y - 3)(x - 5) + k(x - 2y - 3)(x - 4y + 9) = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine fornisce $15 - 27k = 0$, cioè $k = \frac{5}{9}$. Con tale valore si ottiene la conica di equazione

$$14x^2 + 40y^2 + 19xy - 42x - 48y - 90 = 0$$

che non è una parabola.