Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 01.07.2016

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,-1),(0,2)\}$, $\quad \mathcal{B}' = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\}$, è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x,y,z) = (2x - z, -y, z + 2y)$. Determinare nucleo ed immagine di $T \circ L$ ed $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(T \circ L)$.

Poichè $(x,y)_{\mathcal{B}} = (x, \frac{x+y}{2})$, si ottiene

$$L(x,y)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \frac{x+y}{2} \end{pmatrix} = (x, \frac{5x+y}{2}, \frac{x+y}{2}),$$

pertanto

$$L(x,y) = (\frac{7x+y}{2}, \frac{x+y}{2}, \frac{3x+y}{2}).$$

Si ha poi

$$T(L(x,y)) = (-\frac{17x+3y}{2}, -\frac{x+y}{2}, \frac{5x+3y}{2}).$$

Allora $Im(T \circ L) =< (-17,-1,5),(-3,-1,3) >$ ha dimensione 2 cosicchè la composizione $T \circ L$ è iniettiva per il teorema delle dimensioni.
Risulta:

- $(T \circ L)(1,-1) = (-7,0,1)$,

- $(T \circ L)(0,2) = (-3,-1,3)$,
quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(T \circ L) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano ortogonale da $R(O,x,y)$ a $R'(O',x',y')$ e viceversa, essendo:
- l'asse x' la retta per $P(1,-1)$ ortogonale alla retta $s : 3x - 3y = 1$, orientata nel verso delle y crescenti,
- l'asse y' la retta per $Q(-2,2)$,
sapendo inoltre che i due riferimenti sono contraversi.

L'asse x' ha equazione $x + y = 0$, con parametri direttori $(1,-1)$, quindi il versore cercato è $i' = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. L'asse y' ha evidentemente uno dei due versori $j' = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poichè i sistemi devono essere contraversi sceglieremo $j' = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Si ha allora che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

sono le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R. Per ottenere poi le equazioni del cambiamento di riferimento da R ad R' basta risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - 2 = x \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + 2 = y \end{cases}.$$

3. Nel fascio di coniche per l'origine, e aventi per asintoto la retta $r : x - 2y + 7 = 0$, determinare eventuali iperboli equilatere (non degeneri).

Poichè le coniche che si cercano devono essere iperboli equilatere che contengono il punto improprio $R_\infty(2,1,0)$ della retta r, esse dovranno anche contenere il punto $S_\infty(1,-2,0)$ che indica la direzione ortogonale rispetto a R_∞. Tali eventuali iperboli devono quindi appartenere al fascio di coniche tangenti a r in R_∞ e ad una retta del tipo $s: y+2x+p=0$.
Consideriamo le coniche degeri del fascio:

- $\mathcal{C}_1$, costituita dalla retta r e dalla retta s,
- $\mathcal{C}_2$, costituita dalla retta impropria contata due volte.

L'equazione del fascio è quindi, in coordinate omogenee,

$$(X-2Y+7T)(2X+Y+pT)+kT^2=0.$$

Il passaggio per l'origine fornisce la relazione $k=-7p$. Si considera allora l'insieme di coniche di equazione

$$(X-2Y+7T)(2X+Y+pT)-7pT^2=0$$

e si controlla per quali valori di p si ottengono coniche non degeneri, ovvero iperboli equilatere.