Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 01.09.2017 -

---

1. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 3y + z, x + 2y, 2x + 5y - z),$$

se ne determinino il nucleo e l'immagine. Si determini inoltre $M_C^B(L)$, essendo $B = \{(-1, 1, 1), (1, 1, -1), (0, 0 - 2)\}$.

Si ha

$$Im(L) =< (1, 2, 1, 2), (1, 3, 2, 5), (1, 1, 0, -1) >$$

con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

avente rango 2. Allora $Im(L)$ ha dimensione 2 e si ha, ad es.,

$$Im(L) =< (1, 3, 2, 5), (1, 1, 0, -1) > .$$

Dal teorema di Grassmann segue che $dim\ Ker(L) = 1$, infatti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \end{cases}$$

si ottiene $Ker(L) =< (-2, 1, 1) >$.

2. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni continue $\mathbb{R} \to [0, 1]$. Riconoscere se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottospazi:

$$W = \{f \in V \mid f(\frac{1}{2}) = f(1)\},$$

$$U = \{f \in V \mid f(\frac{1}{2}) = 1\}.$$

Se $f, g \in W$ si ha
- $(f+g)(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = f(1) + g(1) = (f+g)(1)$,
- $(\lambda f)(\frac{1}{2}) = \lambda f(\frac{1}{2}) = \lambda f(1) = (\lambda f)(1)$,

quindi $f+g,\ \lambda f \in W$. Segue che W è un sottospazio.
...

3. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2y + z = 2 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

sono sghembe, determinare la loro minima distanza.

Si ha $r(1, 1, -2)$ ed $s(1, 1, -1)$.
Siano $R(k+1, k, 2-2k) \in r$ e $S(h, h, 3-h) \in s$ due punti arbitrari presi, rispettivamente, sulle due rette. Basta allora imporre le condizioni di ortogonalità del vettore $\overline{RS}$ con le rette, ricavare i valori corrispondenti dei due parametri e calcolare la distanza di R da S.