FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

APPELLO DI GEOMETRIA DEL 02.09.2013

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita come segue

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + 2z & x + y \\ x + y + z & 0 \end{pmatrix}.$$

Provare che l'applicazione L è lineare. Determinare $Ker(L)$. Determinare inoltre una base per $Im(L)$ ed estenderla ad una base di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

L'applicazione è evidentemente lineare. Il suo nucleo coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Segue che L è un'applicazione iniettiva e, pertanto, la sua immagine ha dimensione 3, generata dalle matrici linearmente indipendenti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aggiungendo, ad es., la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene una base di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2. Discutere ed, eventualmente, risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + (1 - \alpha)y - z = 1 \\ x - 3z = \alpha \\ \alpha z = 3 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-\alpha & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ha rango 3 per $\alpha \neq 0, 1$. Per tali valori del parametro il sistema lineare è di Cramer ed ammette un'unica soluzione. Nel caso $\alpha = 1$ la matrice sopra ha rango 2, mentre la matrice completa del sistema ha rango massimo, allora il sistema è incompatibile. Il caso $\alpha = 0$ è evidentemente da scartare.

3. Date le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z \end{cases}, \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z \end{cases}, \qquad r_3 : \begin{cases} x = -2z + 2 \\ y = 2z \end{cases},$$

determinare, se esistono, rette ad esse incidenti e parallele al piano xy.

Una retta t parallela al piano xy ha parametri direttori del tipo $(l, m, 0)$, pertanto equazioni ridotte della forma

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = q \end{cases}.$$

La determinazione di m, p, q si risolve imponendo la condizione di complanarità di t con le tre rette date.