Prova Scritta di GEOMETRIA del 3 Aprile 2007
Soluzioni Proposte

1. Per ogni $v = (x, y, z) \in R^3$ si ha

$$L(v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (3x + 5y + z, 2y, 3x, 3z).$$

Allora

$$L(v) = (3x + 5y + z)(1, 2, 1, 1) + 2y(2, 0, 3, 1) + 3x(1, 0, 2, 0) + 3z(0, 0, 1, 3) =$$

$$= (6x + 9y + z, 6x + 10y + 2z, 9x + 11y + 4z, 3x + 7y + 10z) =$$
$$= (6x, 6x, 9x, 3x) + (9y, 10y, 11y, 7y) + (z, 2z, 4z, 10z).$$

Segue che ImL e' il sottospazio di R^4 cosi' generato

$$ImL =< (6, 6, 9, 3), (9, 10, 11, 7), (1, 2, 4, 10) > .$$

Poiche' i tre vettori sono linearmente indipendenti segue che essi costituiscono una base per ImL.

2. La matrice dei coefficenti del sistema e'

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & -k & 2 \end{pmatrix}$$

ed essa ha evidentemente sempre rango 2, qualunque sia il valore del parametro k. Quindi il sistema ammette sempre soluzioni e la "dimensione" dell'insieme delle soluzioni e' 2. Per la risoluzione effettiva si considera il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + t = 1 + 2y \\ 2t = (2 - k)y + kz \end{cases}$$

nelle incognite x e t. L'unica soluzione di tale sistema e' la coppia $(1+\frac{2+k}{2}y-\frac{k}{2}z, \frac{2-k}{2}y + \frac{k}{2}z)$, pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema di partenza e'

$$S = \{(1 + \frac{2 + k}{2}y - \frac{k}{2}z, y, z, \frac{2 - k}{2}y + \frac{k}{2}z)|y, z \in R\}.$$

3. La parabola cercata e' tangente alla retta impropria nel punto $P_\infty(2,1,0)$ ed alla retta di equazione $X - Y + 2T = 0$ nel suo punto $P(1,3,1)$. Essa appartiene quindi al fascio di coniche bitangenti descritto dai dati precedenti. Le coniche degeneri del fascio sono:

- $\mathcal{C}_1$: spezzata nelle due rette sopra e di equazione $(X - Y + 2T)T = 0$,
- $\mathcal{C}_2$: costituita dalla retta per P e P_∞, contata due volte, avente equazione $(X - 2Y + 5T)^2 = 0$.

L'equazione del fascio e' pertanto

$$(X - Y + 2T)T + k(X - 2Y + 5T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine $O = (0,0,1)$ si ottiene per il parametro il valore $k = -\frac{2}{25}$.

4. Poniamo $u = (a,b,c)$. Affinche' u sia parallelo al piano di equazione $x - 2y + 3 = 0$ e quindi parametri di giacitura $(1,-2,0)$, deve essere che $a - 2b = 0$ cioe' $a = 2b$. Allora si puo' scrivere $u = (2b,b,c)$. Un vettore v ortogonale ad un piano ha coordinate proporzionbali ai parametri di giaucitura, che in questo caso sono $(1,0,0)$. Si ottiene che il vettore in questione e' del tipo $v = (d,0,0)$. La condizione $u + v = (2,3,1)$ diventa

$$\begin{cases} 2b + d = 2 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

da cui $d = -4$. In definitiva: $u = (6,3,1)$ e $v = (-4,0,0)$.

L.S.