Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 04.02.2008

1. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 3y^2 - 5xy + 7y - 2 = 0$$

é degenere e determinarne le componenti.

La conica ha matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & -3 & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

con determinante nullo, pertanto é degenere.
I punti impropri della conica sono quelli delle due rette la cui equazione complessiva é $2x^2 - 3y^2 - 5xy = 0$. Posto $t = \frac{x}{y}$ si ottiene l'equazione

$$2t^2 - 5t - 3 = 0,$$

le cui radici sono 3 e $-\frac{1}{2}$. Allora le rette cercate si ottengono da $\frac{x}{y} = 3$ e $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}$, cioé

$$x - 3y = 0, \quad e \quad 2x + y = 0.$$

La conica é quindi costituita da due rette parallele a queste e la sua equazione si deve ottenere come

$$(x - 3y + h)(2x + y + k) = 2x^2 - 3y^2 - 5xy + (2h + k)x + (h - 3k)y + hk = 0.$$

Poiché il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 & 0 & 7 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & 2h+k & h-3k & hk \end{pmatrix}$$

deve essere 1, si ottiene

$$\begin{cases} 2h + k = 0 \\ h - 3k = 7 \\ hk = -2 \end{cases}$$

cioé $h = 1$ e $k = -2$. Allora le componenti di $\mathcal{C}$ sono le rette

$$x - 3y + 1 = 0, \quad e \quad 2x + y - 2 = 0.$$

2. Considerate le rette r ed s di equazioni rispettive

$$r : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t \\ z = t - 2 \end{cases} \qquad\qquad s : \begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

determinare se esistono punti $R \in r$ e $S \in s$ in modo tale che la retta per R ed S sia parallela ai piani $\pi : x + y + z = 0$ e $\sigma : y - z + 3 = 0$.

La retta s ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t' + 1 \\ y = \frac{1}{2}t' \\ z = t' \end{cases}$$

Il generico punto di r é del tipo $R(2t+1, -t, t-2)$ mentre il generico punto di s é $S(2t' + 1, \frac{1}{2}t', t')$. La retta RS ha parametri direttori $(2t' - 2t, \frac{1}{2}t' + t, t' - t + 2)$. La condizione di parallelismo col piano π si scrive

$$7t' - 4t + 4 = 0$$

e quella con il piano σ

$$t' - 4t + 4 = 0,$$

dalle quali si ricava $t' = 0$ e $t = 1$. Allora i punti $R(3, -1, -1)$ ed $S(1, 0, 0)$ sono quelli cercati.

3. Determinare se esiste un'applicazione lineare $L : R^3 \to R^2$ tale che
- $L(1, -1, 2) = (1, -1)$
- $L(0, 0, -3) = (3, -6)$
- $L(2, 0, 0) = (2, 0)$
- $L(1, 2, 0) = (5, -6)$

Si verifica subito che i tre vettori $(1,-1,2),(0,0,-3),(2,0,0)$ costituiscono una base per R^3, pertanto esiste un'unica applicazione lineare $L : R^3 \to R^2$ che manda tali vettori, ordinatamente, nei vettori $(1,-1),(3,-6),(2,0)$ di R^2. Sia $(x,y,z) \in R^3$, da

$$(x,y,z) = a(1,-1,2) + b(0,0,-3) + c(2,0,0) = (a+2c, -a, 2a-3b)$$

si ottiene il sistema di Cramer

$$\begin{cases} a + 2c = x \\ -a = y \\ 2a - 3b = z \end{cases}$$

la cui soluzione é $(-y, -\frac{z+2y}{3}, \frac{x+y}{2})$. Allora

$$L(x,y,z) = -y(1,-1) - \frac{2y+z}{3}(3,-6) + \frac{x+y}{2}(2,0) = (x-2y-z, 5y+2z).$$

Poiché $L(1,2,0) = (-3,10)$, segue che l'applicazione richiesta non esiste.

4. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare di $k \in R$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x - ky = -2 \\ 2x + y = k \\ x - y = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema é

$$\begin{pmatrix} 1 & -k & -2 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante vale $(k+2)(k-3)$. Allora, per ogni $k \neq -2, 3$, il sistema non ha soluzioni, in base al teorema di R.-C.
Caso $k = -2$. La matrice dei coefficienti e quella completa del sistema risultante hanno rango 2 e l'unica soluzione $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ é quella del sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + 2y = -2 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

Lo stesso accade nel caso $k = 3$ e l'unica soluzione $(1, 1)$ é quella del sistema di Cramer

$$\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$