

Prova Scritta di GEOMETRIA del 4 Luglio 2006  
Soluzioni Proposte

1. Le coordinate del vettore  $L(x, y, z)$  sulla base  $\mathcal{B}$  si ottengono come segue:

$$L(x, y, z)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x + y, 0, x + z, y - 2z).$$

Allora

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= (2x+y)(1, 0, 0, 2) + 0(1, 0, 2, 0) + (x+z)(0, 0, 0, 3) + (y-2z)(0, 1, 0, -1) = \\ &= (2x + y, y - 2z, 0, 7x + y + 5z) \end{aligned}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} \text{Im}L &= \{(2x + y, y - 2z, 0, 7x + y + 5z) : x, y, z \in R\} = \dots \\ &= \{x(2, 0, 0, 7) + y(1, 1, 0, 1) + z(0, -2, 0, 5) : x, y, z \in R\} = \\ &\quad \langle (2, 0, 0, 7), (1, 1, 0, 1), (0, -2, 0, 5) \rangle \end{aligned}$$

Poiché i tre vettori sopra sono linearmente dipendenti segue che  $\text{Im}L$  ha dimensione 2 ed una sua base è costituita ad es. dai vettori  $(2, 0, 0, 7), (1, 1, 0, 1)$ .

2. La matrice completa e quella dei coefficienti del sistema hanno sempre rango 2, determinato dal minore

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per qualunque valore di  $k$ . Allora, il sistema è sempre risolubile : si considera il sistema di Cramer

$$\begin{cases} -4y + z = -4x - 2y \\ 2y = 1 - kx - (k+1)t \end{cases} .$$

e si procede nel solito modo.

**3.** La parabola cercata appartiene al fascio di coniche (tutte parabole) bitangenti alla retta impropria in  $X_\infty(1, 0, 0)$  ed alla retta  $X - Y - T = 0$  nel suo punto  $P(2, 1, 1)$ . Le coniche degeneri sono allora costituite, una dalle rette  $T = 0$  e  $X - Y - T = 0$  e l'altra dalla retta congiungente  $X_\infty$  e  $P$  contata due volte. Allora l'equazione del fascio é data da

$$(X - Y - T)T + k(Y - T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per  $R(5, 2, 1)$  si ricava il valore del parametro e l'equazione cercata.

**4.** La retta  $r$  cercata appartiene:

- al piano per  $P$  parallelo a  $\pi : 2x + y - 1 = 0$  cioè  $\pi' : 2x + y - 3 = 0$ ,
- al piano per  $P$  del fascio di asse la retta

$$\begin{cases} X - 5Y + 3Z + 2T = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

cioé  $\sigma : X - 5Y + 3Z - 8T = 0$ .

Allora

$$r : \begin{cases} X - 5Y + 3Z - 8T = 0 \\ 2X + Y - 3T = 0 \end{cases}$$

L.S.