FACOLTÀ di INGEGNERIA
Prova Scritta di GEOMETRIA del 6 Aprile 2006

[1] Sia $L : R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare rappresentata dalla seguente matrice, rispetto alle basi canoniche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Stabilire se $L$ é iniettiva.

[2] Stabilire per quali valori del parametro reale $k$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2kx + y = k + 1 \end{cases}$$

ammette ed eventualmente determinarle.

[3] Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per il punto $R(2, 1, 3)$, parallela al piano $yz$ e incidente la retta

$$\begin{cases} x = 2y + 5 \\ z = 3y \end{cases}$$

[4] Si scriva un'equazione cartesiana della conica avente come asintoto la retta $2x + 3y - 1 = 0$, tangente in $P(0, 1)$ alla retta $y = x + 1$ e passante per il punto $Q(1, 3)$. Classificare tale conica.

Soluzioni Proposte

**1.** L'applicazione data e' iniettiva se l'equazione $L(x,y,z) = (0,0,0,0)$ ammette come unica soluzione il vettore $(0,0,0)$. Poiche' la matrice data ha rango pari a 2 segue che l'applicazione non e' iniettiva. Infatti, si ha

$$L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y, 5y+10z, x+3y+4z, 2x+3y+2z).$$

e il sistema omogeneo

$$\begin{cases} x+y=0 \\ 5y+10z=0 \\ x+3y+4z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$$

ammette uno spazio di soluzioni di dimensione 1.

**2.** La matrice completa del sistema :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2k & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

ha determinante che vale $k-2$. Allora, per tutti i valori reali di $k$, con $k \neq 2$, il sistema non ha soluzione.
Nel caso $k = 2$, la matrice completa del sistema ha rango 2 (la terza riga e' somma delle altre due) cosi' come quella dei coefficienti. Allora il sistema corrispondente ha un'unica soluzione che si ricava, ad es., risolvendo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} 3x+2y=3 \\ x-y=0 \end{cases} .$$

**3.** La retta cercata appartiene al piano di equazione $x = 3$ (parallelo al piano yz e passante per $R$) ed al piano di asse la retta data passante per $R$. Dall'equazione del fascio di piani

$$k(x-2y-5)+z-3y=0,$$

il passaggio per $R$ fornisce $k = 0$. Allora la retta e' data da

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

**4.** Si puo' costruire il fascio di coniche bitangenti alla retta $2x+3y-1=0$ nel suo punto improprio $P_\infty(3,-2,0)$ ed alla retta $x-y+1=0$ nel punto $P(0,1,1)$. Una conica degenere del fascio e' quindi data da $(2X+3Y-T)(X-Y+T)=0$, mentre l'altra e' data dalla retta per $P$ e $P_\infty$ contata due volte, cioe' $(2X+3Y-3T)^2=0$. L'equazione del fascio si scrive

$$(2X+3Y-T)(X-Y+T)+\lambda(2X+3Y-3T)^2=0.$$

Il passaggio per $Q(1,3,1)$ fornisce il valore $\lambda = \frac{5}{32}$.
La conica e' poi certamente una iperbole poiche': (1) la tangente in un suo punto improprio non e' la retta impropria, (2) uno dei suoi punti impropri e' reale.

L.S.