Soluzioni della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 07.07.2009

1. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix},$$

determinare i valori del parametro reale k per cui L non è suriettiva e determinarne l'immagine.

L'applicazione è definita da

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (kx - y + 2z, x + ky, ky + z)$$

L'applicazione è suriettiva quando la sua immagine ha dimensione pari a 3. Si ha

$$Im\, L = \{x(k, 1, 0) + y(-1, k, k) + z(2, 0, 1) : x, y, z \in R\} =$$

$$< (k, 1, 0),\ (-1, k, k),\ (2, 0, 1) > .$$

Allora L è non suriettiva esattamente quando i tre vettori sopra sono linearmente dipendenti, cioè quando il determinante di A è nullo. Poichè $D(A) = (k + 1)^2$, questo per accade per $k = -1$ ed in tal caso si ha

$$Im\, L =< (-1, 1, 0),\ (-1, -1, -1),\ (2, 0, 1) >=$$

$$=< (-1, 1, 0),\ (2, 0, 1) >=$$

2. Verificare che la conica

$$\mathcal{C} \quad : \quad 2x^2 - y^2 + xy + 5x - y + 2 = 0$$

è degenere e determinarne le componenti.

La matrice della conica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

è tale che $A_1 = A_3 - A_2$, pertanto ha determinante nullo e la conica è degenere.
Da $2x^2 - y^2 + xy = 0$, posto $t = \frac{x}{y}$ si ha

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

con radici -1 ed $\frac{1}{2}$: Allora i punti impropri della conica sono $P_\infty(1, -1, 0)$ e $Q_\infty(1, 2, 0)$. La conica data deve essere costituita da due rette aventi, rispettivamente, tali direzioni:

$$\mathcal{C} \quad : \quad (2x - y + h)(x + y - k) = 0.$$

L'equazione $2x^2 - y^2 + xy + (h - 2k)x + (h + k)y + hk = 0$ deve essere equivalente a quella data per la conica. Questo accade quando

$$rang \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & (h-2k) & (h+k) & -hk \end{pmatrix} = 1.$$

Dal sistema

$$\begin{cases} h - 2k = 5 \\ h + k = -1 \\ -hk = 2 \end{cases},$$

si ricava $h = 1$ e $K = -2$. Allora le componenti di $\mathcal{C}$ sono le rette di equazione:

$$2x - y + 1 = 0 \quad e \quad x + y - 2 = 0.$$

3. Dopo aver verificato che le rette

$$r \;:\; \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases} \qquad e \qquad s \;:\; \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases} \qquad ,$$

sono sghembe, determinarne la minima distanza.

Le rette date sono effettivamente sghembe, infatti

$$D\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Il generico piano per s ha equazione $x - z + k(y - 2z) = 0$. Cioè $x + ky - (1+2k)z = 0$.
La condizione di parallelismo con $r(2,-1,2)$ fornisce $k = 0$, quidi il piano $\pi : x - z = 0$. Un punto di r è, ad es., $R(1,0,0)$ Infine, $d(R,\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Considerati i sottospazi

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 : y - 2x = 0\}$$

e

$$W =< (1,0,-1),\, (2,0,3) >$$

di R^3, determinarne l'intersezione.

Un generico vettore di V è del tipo $v = (x, 2x, z)$, $x, z \in R$. Si ha poi che $v \in W$ se e solo se $2x = 0$. Allora

$$V \cap W = \{(0,0,z) : z \in R\} =< (0,0,1) > .$$

4. Considerati i sottospazi

$$V = \{(x,y,z) \in R^3 : y - 2x = 0\}$$

e

$$W =< (1,0,-1),\ (2,0,3) >$$

di R^3, determinarne l'intersezione.