Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 7.09.2009

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare rappresentata sulle basi canoniche dalla matrice

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L) = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -k \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare i valori del parametro reale k per cui l'applicazione risulta iniettiva e, nel caso, determinarne l'immagine.

L'applicazione è definita da

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -k \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (kx+2z, -x-y, 2x+2y-kz, 2y-2z),$$

e pertanto il suo nucleo ha dimensione pari a $3 - r$, essendo r il rango della matrice data. Allora L è iniettiva quando $r = 3$. Il minore costituito dalla prima e dalle ultime due righe ha determinante non nullo, qualunque sia il valore di k. Segue che l'applicazione è sempre iniettiva.
Si ha evidentemente:

$L(1, 0, 0) = (k, -1, 2, 0),\ L(0, 1, 0) = (0, -1, 2, 2),\ L(0, 0, 1) = (2, 0, -k, -2).$
Tali vettori sono linearmente indipendenti e generano l'immagine di L.

2. Determinare, se esistono, parabole tangenti alla retta $r : 2x-y+1 = 0$ nel punto $P(1, 3)$ ed alla retta $s : x - y + 1 = 0$ nel punto $Q(1, 2)$.

Costruiamo il fascio di coniche bitangenti alle rette date nei punti indicati. Tale fascio ha equazione

$$(2x - y + 1)(x - y + 1) + k(x - 1)^2 = 0$$

cioè

$$(2+k)x^2 - 3xy + y^2 + (1-2k)x - 2y + 1 + k = 0.$$

La conica rappresentata da tale equazione è una parabola solo quando $k = \frac{1}{4}$.

3. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare del parametro reale k, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2kx - 4y + kz - 1 = 0 \\ x + ky + 2kz + 4 = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{pmatrix} 2k & -4 & k \\ -1 & k & 2k \end{pmatrix}$$

ed il suo rango dipende dai minori

$$\begin{pmatrix} 2k & -4 \\ -1 & k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2k & k \\ -1 & 2k \end{pmatrix}$$

i quali hanno determinante, rispettivamente, $2k^2 - 4$ e $4k^2 + k$. Poichè non esiste un valore di k che annulla contemporaneamente i due minori, segue che la matrice ha sempre rango due. In base al teor di R.-C. il sistema è sempre risolubile e le soluzioni si ottengono al solito modo.

4. Determinare la retta per l'origine incidente la retta impropria del piano $\pi: x - 2y + z - 1 = 0$ e la retta r di equazioni

$$r: \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

La retta cercata appartiene al piano per l'origine parallelo a π ed al piano del fascio di asse r passante per l'origine. Quest'ultimo ha equazione che si ricava da

$$x + z - 2 + k(x - y - 1) = (k+1)x - ky + z - 2 - k = 0.$$

Il passaggio per l'origine comporta $k = -2$, quindi l'equazione cercata è $x - 2y - z = 0$.
Infine la retta richiesta ha equazioni del tipo

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$