FACOLTÀ di INGEGNERIA
Corso di Laurea Ing. Civile
Prova Scritta di GEOMETRIA del 8.02.2010

1. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sulla base $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (2,0,2), (0,2,-1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e sulla base canonica di $\mathbb{R}^4$, determinare la dimensione ed una base della sua immagine.

Si ha:

$$L(x,y,z) = L(x,y,z)_{\mathcal{C}} = A \cdot (x,y,z)_{\mathcal{B}}$$

Posto $(x,y,z)_{\mathcal{B}} = (a,b,c)$, *da*

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(2,0,2) + c(0,2,-1) = (a+2b, a+2c, a+2b-c)$$

si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 2b = x \\ a + 2c = y \\ a + 2b - c = z \end{cases}$$

che è di Cramer ed ammette l'unica soluzione $(-2x+y+2z, \frac{3x-y-2z}{2}, x-z)$. *Allora*

$$L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2x+y+2z \\ \frac{3x-y-2z}{2} \\ x-z \end{pmatrix} =$$

$$= (x-z, \frac{x-y}{2}, -x+y+z, \frac{3x-y-2z}{2}).$$

Si ricava

$$Im(L) = \{(x, \frac{1}{2}x, -x, \frac{3}{2}x) + (0, -\frac{1}{2}y, y, -\frac{1}{2}y) + (-z, 0, z, -z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$

$$=< (1, \frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}), (0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}), (-1, 0, 1, -1) > .$$

Poichè la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3*, si ricava che i tre vettori indicati costituiscono una base per* $Im(L)$ *e che la sua dimensione è quindi* 3.

2. Studiare la curva di equazione

$$y^4 - x^2y^2 - 2xy^2 - 3xy - 2x + 2 = 0,$$

nei suoi punti impropri e nel punto $P(1, 0)$.

I quattro punti impropri della curva sono quelli delle rette di equazione complessiva

$$y^4 - x^2y^2 = y^2(y + x)(y - x) = 0,$$

Cioè $X_\infty(1, 0, 0)$*, contato due volte, ed i punti* $P_\infty(1, 1, 0)$ *e* $Q_\infty(1, -1, 0)$*.*
Intersecando la curva con la generica retta per X_∞*, di equazione* $y = k$*, si ottiene l'equazione*

$$k^2x^2 - (2k^2 + +3k + 2)x + 2 = 0,$$

che ammette in generale due soluzioni sul campo complesso. Allora, la generica retta di equazione $y = k$ *ha interseca la curva in due punti propri ed in* X_∞ *con molteplicità* 2*. Segue che* X_∞ *è un punto doppio e le due tangenti in esso coincidono con la retta di equazione* $y = 0$*.* $k = 0$ *è infatti l'unico valore per cui l'equazione sopra si abbassa di grado.*
Intersecando la curva con la generica retta per P_∞*,, di equazione* $y = x + k$ *si ottiene l'equazione*

$$2(k - 1)x^3 + ... = 0,$$

che ammette in generale tre soluzioni sul campo complesso. Allora, la generica retta di equazione $y = x + k$ ha interseca la curva in tre punti propri ed in P_∞ con molteplicità 1. Segue che P_∞ è un punto semplice e la tangente in esso coincide con la retta di equazione $y = x + 1$. $k = 1$ è infatti l'unico valore per cui l'equazione sopra si abbassa di grado.
Discorso analogo per il punto P_∞.
Il punto $P(1, 0)$ appartiene alla curva. Le derivate parziali prime

$$f_x = -2xy^2 - 2y^2 - 3y - 2, \qquad f_y = -4y^3 - 2x^2y - 4xy - 3x$$

forniscono $f_x(P) = -2, \quad f_y(P) = -3$. Segue che il punto è semplice con tangente la retta di equazione $2x + 3y - 2 = 0$.

3. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare del parametro reale k, il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + 2y - kz = k \\ x + kz = 0 \\ kx - 2ky = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & -k \\ 1 & 0 & k \\ k & -2k & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante che vale $2k^2(k + 2)$. Allora, per tutti i valori reali di k, diversi da 0 e da -2, il sistema dato è di Cramer e la sua unica soluzione è data da

$$(x = \frac{\begin{pmatrix} k & 2 & -k \\ 0 & 0 & k \\ 0 & -2k & 0 \end{pmatrix}}{2k^2(k+2)}, \quad y = \frac{\begin{pmatrix} k & k & -k \\ 1 & 0 & k \\ k & 09 & 0 \end{pmatrix}}{2k^2(k+2)}, \quad x = \frac{\begin{pmatrix} k & 2 & k \\ 1 & 0 & 0 \\ k & -2k & 0 \end{pmatrix}}{2k^2(k+2)})$$

Nel caso $k = 0$ il sistema diviene

$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

ed ammette evidentemente lo spazio di soluzioni

$$S_0 = \{(0,0,z) \,|\, z \in \mathbb{R}\} =< (0,0,1) > .$$

Nel caso $k = -2$ *il sistema diviene*

$$\begin{cases} -2x + 2y + 2z = -2 \\ x - 2z = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

con matrice dei coefficienti che ha rango 2*, mentre la matrice completa ha rango* 3*, dato ad es. dal minore*

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi, per il teor. di R.-C., non ci sono soluzioni.

4. Tra i piani contenenti la retta r di equazione

$$\begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases}$$

determinare:
- il piano π parallelo al vettore $v = (2, -1, 3)$,
- il versore parallelo al piano π ed al piano $\sigma : x - 3y - z + 5 = 0$, orientato nel verso delle y decrescenti.

Il fascio di piani di asse la retta r *ha equazione*

$$x - 2z - 1 + k(y + z - 2) = x + ky + (k-2)z - 2k - 1 = 0.$$

la condizione di parallelismo con il vettore v *fornisce*

$$2 - k + 3(k - 2) = 0,$$

da cui $k = 2$. *Allora il piano* π *ha equazione* $x + 2y - 5 = 0$.
Il versiore cercato deve essere parallelo alla retta $\pi \cap \sigma$ *di equazioni*

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ x - 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

la quale ha parametri direttori $(2, -1, 5)$. *Il vettore con tali coordinate ha modulo* $\sqrt{30}$, *pertanto il versore cercato ha coordinate*

$$(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}})$$

ove la seconda coordinata negativa soddisfa la richiesta del problema.