Dipartimento di Ingegneria Civile - Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 08.02.2019 -

---

1. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 5x + ky - z = 3k \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Per la matrice completa del sistema si ha

$$D\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & k & -1 & 3k \end{pmatrix} = 56(1-k)$$

mentre la matrice dei coefficienti ha rango 3,

$$D\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -14.$$

Allora il sistema non ammette soluzioni per tutti i valori del parametro diversi da 1. Per $k = 1$ le due matrici hanno rango 3 ed il sistema ammette un'unica soluzione che si ricava dal sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 6 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}.$$

2. Determinare la retta per il punto $P(-1, 2, 3)$ parallela al piano

$$\pi : 3x - 2y + 7z - 1 = 0$$

ed incidente l'asse z.

La retta cercata si può ottenere come intersezione del piano per P parallelo a π con il piano per P del fascio di asse l'asse z.

3. Determinare, se esiste, l'iperbole equilatera avente come asintoto la retta $r : x - 3y + 2 = 0$, passante per l'origine e per il punto $P(1, 1)$.

Il punto improprio della retta r è $R_\infty(1, \frac{1}{3}, 0) \equiv (3, 1, 0)$. Il punto improprio che indica la direzione ortogonale a quella di R_∞ è quindi $S_\infty(1, -3, 0)$. Allora l'altro asintoto dell'iperbole è una retta s di equazione $y = -3x + p$. Si può costruire il fascio di iperboli equilatere bitangenti ad r in R_∞ ed ad s in S_∞. Le coniche degeneri del fascio sono allora :

- quella spezzata nelle due rette r ed s,
- quella costituita dalla retta impropria contata due volte.

L'equazione del fascio è :

$$(X - 3Y + 2T)(3X + Y - pT) + kT^2 = 0.$$

Imponendo che questa sia soddisfatta dalle coordinate omogenee dell'origine e del punto P, si ricavano i due parametri. Rimane da verificare se la conica ottenuta è effettivamente un'iperbole, cioè non degenere.