Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 9.01.2020

---

1. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed alla base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$ di $\mathbb{R}^2$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinarne inoltre il nucleo.

Si ha

$$L(x,y,z,t)_{\mathcal{B}} = A(x,y,z,t)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= (2x + z + 2t, -x - y + 3t).$$

Allora

$$L(x,y,z,t) = (2x + z + 2t)(1,1) + (-x - y + 3t)(1,-1) =$$

$$= (2x - y + 5t, 2x + y + 2z - t).$$

Per determinare il nucleo di L basta risolvere il sistema omogeneo

$$s : \begin{cases} 2x - y + 5t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}.$$

2. Sia r la retta per il punto $P(1,-1,2)$ ortogonale al piano $\pi : 2x - y + z - 7 = 0$. Determinare il piano contenente r e ortogonale alla retta

$$s : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x + 2z = 1 \end{cases}.$$

La retta r ha equazioni, in forma di rapporti uguali, data da

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1},$$

essendo $(2,-1,1)$ i parametri di giacitura di π. Allora

$$r : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

con parametri direttori evidentemente $(2,-1,1)$.
Il fascio di piani di asse r ha equazione

$$x + ky + (k-2)z - k + 3 = 0.$$

La condizione di ortogonalità con la retta $s(1,1,-1)$ è

$$|| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & k & k-2 \end{matrix} || = 1,$$

da cui $k = 1$. ...

3. Studiare la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^3 + x^2y - 6x^2 - 6xy + 9x + 9y - 2 = 0$$

nei suoi punti impropri e nel punto $P(2,0)$.

Da $x^3 + x^2y = x^2(x+y) = 0$ si ricava che i punti impropri della curva sono:
- $Y_\infty(0,1,0)$, contato due volte,
- $Q_\infty(1,-1,0)$.

Per mezzo delle derivate parziali prime del polinomio $X^3 + X^2Y - 6X^2T - 6XYT + 9XT^2 + 9YT^2 - 2T^3$, si ricava facilmente che Q_∞ e P sono punti semplici e si trova la tangente relativa.
La generica retta per Y_∞ ha equazione $x = k$. Intersecandola con la curva si ottiene l'equazione :

$$(k^2 - 6k + 9)y + k^3 - 6k^2 + 9k - 2 = 0.$$

Questa afferma che dei tre punti comuni alla curva ed alla retta solo uno è proprio, mentre gli altri due cadono necessariamente in Y_∞, il quale è pertanto un punto doppio. Le tangenti principali si ottengono per i valori di k per cui $k^2 - 6k + 9 = 0$, cioè le due tangenti sono reali e coincidenti con la retta $x = 3$.