Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 09.09.2019 -

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$L(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ x+y+z & 0 \end{pmatrix}.$$

Provare che L è lineare e determinarne nucleo ed immagine.

Si ha

$$L[(x, y, z) + (x', y', z')] =$$
$$= L(x+x', y+y', z+z') \begin{pmatrix} x+x' & x+x'+y+y' \\ x+x'+y+y'+z+z' & 0 \end{pmatrix} = \dots$$
$$\dots = L(x, y, z) + L(x', y', z').$$

Analogamente per la seconda proprietà, quindi L è lineare.

$$Im\ L = \{\begin{pmatrix} x & x+y \\ x+y+z & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= \{x \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} =$$
$$= < \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > .$$

Poichè le tre matrici sono evidentemente linearmente indipendenti in $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, segue che $dimImL = 3$ e, per Grassmann, $dimKerL = 0$, quindi L è iniettiva.

2. Considerati i piani

$$\pi : x + y + 2z + 2 = 0, \quad \sigma : x + y + 2z - 10 = 0,$$

determinare la loro distanza ed il piano simmetrico di π rispetto a σ.

I piani sono paralleli, quindi per trovare la loro distanza basta prendere un punto qualunque $P \in \pi$ ed applicare la formula $d(P, \sigma)$. Tale distanza risulta pari a $2\sqrt{6}$.
Il piano cercato è parallelo ai precedenti, quindi ha equazione $x+y+2z+d=0$ e passa per un punto Q simmetrico di un punto $R \in \pi$ rispetto ad un punto $S \in \sigma$. Per $S(2,2,3)$ si ha $Q(5,3,7)$. Risulta infine $d=-22$.

3. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+kz=2k-1 \\ x+ky+z=k \\ kz+y+z=1 \end{array}\right.$$

al variare del parametro reale k.

La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante che vale $(k-1)^2(k+2)$. Allora il sistema è di Cramer per ogni $k \neq 1, -2$ ed ammette un'unica soluzione che si calcola nel modo solito.
Se $k=1$ il rango comune alle due matrici è 2 ed il sistema ha insieme di soluzioni di "dimensione" 1. ...
Per $k=-2$ non esistono soluzioni.