Prova Scritta di GEOMETRIA del 10 Gennaio 2006
Soluzioni Proposte

1. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $L : R^3 \to R^2$ tale che
- $L(1,0,0) = (1,0)$
- $L(0,1,0) = (3,2)$
- $L(0,0,1) = (0,0)$
- $L(1,2,2) = (3,1)$

motivando adeguatamente la risposta

Esiste un'unica applicazione lineare $L : R^3 \to R^2$ che manda ordinatamente i vettori della base canonica di R^3 nei vettori $(1,0), (3,2), (0,0)$. Tale applicazione e' definita nel modo seguente :

$$L(x,y,z) = L[x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)] =$$

$$= x(1,0) + y(3,2) + z(0,0) = (x + 3y, 2y).$$

Poiche' $L(1,2,2) = (7,4)$, segue che l'applicazione richiesta non esiste.

2. Stabilire per quali valori reali di k il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 4y - z = 0 \\ kx + y = k \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle.

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, qualunque sia il valore del parametro k, cosi' come la matrice completa. Allora, in base al teorema di R.-C., il sistema ammette sempre soluzioni. La dimensione dell' "insieme" delle soluzioni e' 1. Si considera il sistema di Kramer

$$\begin{cases} 4y - z = -x \\ y = k - kx \end{cases}$$

la cui soluzione e' la coppia $(k-kx, 4k-(4k-1)x)$; allora l'insieme delle delle soluzioni del sistema dato e'

$$S = \{(x, k-kx, 4k-(4k-1)x) | \in R\} =$$

$$= (0, k, 4k) + \{(x, -kx, -(4k-1)x) | x \in R\} =$$
$$= (0, k, 4k) + < (1, -k, -(4k-1) > .$$

Si noti che in corrispondenza di ciascun valore di k si ottiene un determinato sistema lineare, le cui soluzioni sono quelle indicate.

3. Si scriva un'equazione cartesiana dell'iperbole passante per i punti $P(1,1,1)$ e $Q(3,2,1)$ e $R(2,0,0)$ e tangente alla retta $r : 4y - x = 0$ nel suo punto improprio.

L'iperbole cercata appartiene al fascio di coniche tangenti alla retta $y = \frac{1}{4}x$ nel suo punto improprio $S_\infty(4,1,0)$ e passanti per i punti P e Q. Le coniche degeneri del fascio sono quindi, una $\mathcal{C}_1$ costituita dalla retta $y = \frac{1}{4}x$ e dalla retta congiungente i punti P e Q, l'altra $\mathcal{C}_2$ spezzata nelle rette per P e S_∞ e per Q e S_∞, rispettivamente. In coordinate omogenee :

$$\mathcal{C}_1 : (X - 4Y)(X - 2Y + T) = 0$$

$$\mathcal{C}_2 : (X - 4Y + 3T)(X - 4Y + 5T) = 0.$$

Allora l'equazione del fascio e'

$$(X - 4Y)(X - 2Y + T) + k(X - 4Y + 3T)(X - 4Y + 5T) = 0.$$

Imponendo il passaggio per R, si ottiene $k = -1$ e quindi l'equazione dell'iperbole cercata.

4.] Considerate le rette r ed s di equazioni rispettive

$$\begin{cases} y - 3z = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

determinare, se esistono, un punto R di r ed un punto S di s tali che la retta per essi sia parallela ai piani $\alpha : x - 2y = 0$ e $\beta : y - 3z = 2$.

Le equazioni parametriche della retta r si ottengono ponendo, ad es. $z = s$,

$$\begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = 3s \\ z = s \end{cases}$$

Un generico punto $R \in r$ ha quindi coordinate $R(1 + 2s, 3s, s)$, mentre per un generico punto $S \in s$ si ha $S(4, 2t, 3t)$. La retta per questi due punti ha parametri direttori $(3 - 2s, 2t - 3s, 3t - s)$ e imponendo che essa sia parallela ai piani α e β di parametri di giacitura $(1, -2, 0)$ e $(0, 1, -3)$, rispettivamente, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 4s - 4t + 3 = 0 \\ 7t = 0 \end{cases}$$

quindi $t = 0$ e $s = -\frac{3}{4}$. Di conseguenza i punti cercati esistono e si individuano per tali valori dei parametri.

L.S.