Prova Scritta di GEOMETRIA del 10.01.2007
Soluzioni Proposte

1. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $L : R^2 \to R^3$ tale che
- $L(2,1) = (1,0,1)$
- $L(0,3) = (2,1,0)$
- $L(3,2) = (0,0,0)$

motivando adeguatamente la risposta

L'insieme $\mathcal{B} = \{(2,1),(3,2)\}$ costituisce una base per R^2, quindi esiste un'unica applicazione lineare $L : R^2 \to R^3$ tale che $L(2,1) = (1,0,1)$ e $L(3,2) = (0,0,0)$. Dato $(x,y) \in R^2$, determiniamo le sue coordinate su $\mathcal{B}$:

$$(x,y) = a(2,1) + b(3,2) = (2a+3b, a+2b).$$

Da $2a+3b = x$ e $a+2b = y$ si ricava $a = 2x-3y, \quad b = 2y-x$. Allora

$$L(x,y) = (2x-3y)(1,0,1) + (2y-x)(0,0,0) = (2x-3y, 0, 2x-3y).$$

Poiché $L(0,3) = (-9,0,-9)$, segue che l'applicazione richiesta non esiste.

2. Considerati i seguenti due sottospazi di R^4

$$U = \{(x,y,z,t) : y-2t = 0\}, \quad (W =< (1,0,1,1),(0,1,0,0),(2,0,3,0) >$$

determinare la dimensione ed una base di $U \cap W$.

Per prima cosa osserviamo che

$$U = \{(x,2t,z,t) : x,z,t \in R\}.$$

Inoltre, i generatori di W sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base. Un vettore $w \in W$ é allora della forma

$$w = a(1,0,1,1) + b(0,1,0,0) + c(2,0,3,0) = (a+2c, b, a+3c, a).$$

Affinché un tale w sia pure in U deve essere $b = 2a$. Allora gli elementi di $U \cap W$ sono i vettori del tipo $w = (a+2c, 2a, a+3c, a)$. Si ricava

$$U \cap W = \{(a+2c, 2a, a+3c, a) : a,c \in R\} =< (1,2,1,1),(2,0,3,0) >$$

Poiché i due generatori sono linearmente indipendenti, essi costituiscono una base dell'intersezione, la cui dimensione é quindi 2.

3. Determinare un'equazione cartesiana per l'iperbole equilatera passante per il punto improprio dell'asse x, tangente in $P(3,1)$ alla retta di equazione $x-2y-1=0$ e passante per $R(1,2)$.

L'iperbole cercata ha asintoti paralleli, rispettivamente, all'asse x ed all'asse y. Quello parallelo all'asse x avrá equazione $y=h$. Costruiamo il fascio di coniche bitangenti alla retta $y=h$ nel suo punto improprio $X_\infty(1,0,0)$ ed alla retta $x-2y-1=0$ in $P(3,1)$. La prima conica degenere del fascio ha quindi equazione, in coordinate omogenee

$$\mathcal{C}_1 : (X-2Y-T)(Y-hT)=0$$

La seconda, essendo costituita dalla retta per X_∞ e per P contata due volte, é

$$\mathcal{C}_2 : (Y-T)^2=0$$

L'equazione del fascio é allora

$$(X-2Y-T)(Y-hT)+k(Y-T)^2=0$$

Imponendo il passaggio per $Y_\infty(0,1,0)$ e per $R(1,2,1)$, si ottiene $k=2$ e $h=\frac{3}{2}$.

4.] Determinare equazioni omogenee della retta passante per $P(2,1,3)$, parallela al piano $\pi : x-y+z=0$ e incidente la retta impropria del piano $\sigma : 2x-y+2z+1=0$.

---

4. La retta r cercata appartiene:

- al piano per P parallelo a $\pi : x-y+z=0$ cioé $\pi' : x-y+z-4=0$,
- al piano per P parallelo a $\sigma : 2x-y+2z+1=0$ cioé $\sigma' : 2x-y+2z-9=0$

La sua equazione omogenea é pertanto

$$\begin{cases} X-Y+Z-4T=0 \\ 2X-Y+2Z-9T=0 \end{cases}$$

L.S.