Dipartimento di Ingegneria Civile Ambientale

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 10.06.2016

———————————————————————————

1. Studiare ed eventualmente risolvere il seguente sistema lineare al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x - z = 2 \\ 2x - y = 3 \\ y - 2z = 1 \\ 3x - y + kz = k \end{cases} .$$

Per $k = 1$ nessuna soluzione, per $k \neq 1$ un'unica soluzione.

2. Determinare la matrice sulla base canonica dell'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(0,1,0) = (1,0,2), \quad L(4,-2,0) = (2,0,4), \quad L(0,0,3) = (1,0,-1).$$

Studiare l'iniettività e la suriettività di L.

I vettori $(0,1,0), (4,-2,0), (0,0,3)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto esiste un'unica applicazione lineare L che soddisfa le richieste.
Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$(x,y,z) = (\frac{1}{2}x + y)(0,1,0) + \frac{1}{4}x(4,-2,0) + \frac{1}{3}z(0,0,3),$$

allora

$$L(x,y,z) =$$

$$= (\frac{1}{2}x + y)(1,0,2) + \frac{1}{4}x(2,0,4) + \frac{1}{3}z(1,0,-1) =$$
$$= (x + y + \frac{1}{3}z, 0, 2x + 2y - \frac{1}{3}z).$$

Si vede subito che L non è suriettiva infatti, la sua immagine contiene solo vettori con seconda coordinata nulla. Il suo nucleo coincide con lo spazio delle soluzione del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{3}z = 0 \\ 2x + 2y - \frac{1}{3}z = 0 \end{cases}$$

che ha dimensione 1, allora L non è nemmeno iniettiva.

3. Determinare i piani paralleli all'asse y aventi distanza 1 dall'origine e dal punto $P(1,1,0)$.

Un piano π parallelo all'asse y ha equazione $ax + cz + d = 0$. Dalla formula che fornisce la distanza punto/piano si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} a^2 + c^2 - d^2 = 0 \\ c^2 - d^2 - 2ad = 0 \end{cases},$$

quindi

$$a(a - 2d) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \quad \text{oppure} \quad a = -2d, \quad \text{e} \quad c^2 = d^2 - a^2.$$

Infine

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad \dots \quad \text{e} \quad a = -2d \quad \Rightarrow \quad \dots$$

4. Determinare, se esistono, eventuali iperboli equilatere per $P(1,-2)$, tangenti alla conica $\mathcal{C} : 2x^2 - xy + 3x - y = 0$ nell'origine ed alla retta $r : 2x - 3y + 5 = 0$ nel suo punto improprio.

Basta considerare il fascio di coniche bitangenti alla retta $t : 3x - y = 0$ nell'origine ed alla retta r in $R_\infty(3,2,0)$. Si impone poi il passaggio per $P(1,-2)$ e per $S_\infty(-2,3,0)$.