Soluzioni Proposte della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE) dell 10.09.2008

1. Considerate le applicazioni lineari

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x + y, x - y, y + z),$$

$$T : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^2, \quad T(x, y, z) = (x - y - z, 2z)$$

determinare il nucleo dell'applicazione composta $T \circ L$.

Per quanto riguarda l'applicazione composta si ha:

$$T \circ L(x, y, z) = T(x + y, x - y, y + z) = (y - z, 2y + 2z).$$

Il nucleo di $T \circ L$ coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha rango evidentemente 2 e pertanto risulta $dim\ Ker(T \circ L) = 1$. Poiché le soluzioni del sistema sono tutte le terne $(x, 0, 0), \forall x \in \mathtt{R}$, segue che

$$Ker(T \circ L) =< (1, 0, 0) > .$$

2. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$\mathcal{C} : x^2 - 2y^2 + xy + x + 2y = 0$$

é degenere e determinarne le componenti.

La conica data é degenere, infatti la sua matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo.
Posto $\alpha = \frac{x}{y}$, da $x^2 - 2y^2 + xy = 0$ si ottiene $\alpha^2 + \alpha - 2 = 0$ con radici $\alpha = 1$ ed $\alpha = -2$. Allora segue

$$x^2 - 2y^2 + xy = (x - y)(x + 2y).$$

La conica $\mathcal{C}$ deve essere costituita da due rette parallele rispettivamente alle rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + 2y = 0$:

$$\mathcal{C} : (x - y + h)(x + 2y + k) = 0.$$

Affinché l'equazione $x^2 - 2y^2 + xy + (h + k)x + (2h - k)y + hk = 0$ sia equivalente a quella data per $\mathcal{C}$ deve essere

$$rango \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & h+k & 2h-k & hk \end{pmatrix} = 1$$

da cui si ricava $h = 1$ e $k = 0$. Allora le componenti di $\mathcal{C}$ hanno equazioni $x - y + 1$ e $x + 2y = 0$.

3. Verificare che le rette r ed s di equazioni rispettive

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases}$$

ed

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

sono sghembe e determinare la loro distanza.

La matrice dei coefficienti delle equazioni delle due rette

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo, quindi le due rette sono effettivamente sghembe. La (minima) distanza tra di esse si calcola come segue : si considera il piano π per la prima retta (di equazione $2x - y + 1 + k(x + y + 2) = 0$), parallelo alla seconda retta (di parametri direttori $(-2,1,1)$). π ha equazione $2x+5y-z+7=0$, che si ottiene per il valore $k=-4$. Preso un punto qualunque di s, ad es. l'origine, basta calcolare la sua distanza da π con la nota formula:

$$d(O,\pi)=\frac{7}{\sqrt{30.}}$$

4. Determinare la matrice del cambiamento di base in $\mathtt{R}^3$ quando si passa dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B}=\{(2,-1.3),(1,4.0),(2,2,1)\}$.

Si devono esprimere i vettori della base canonica sulla base $\mathcal{B}$ per ricavare la matrice cercata. Ad es. deve essere

$$(1,0,0)=a(2,-1.3)+(1,4.0)b+(2,2,1)c=(2a+b+2c,-a+4b+2c,3a+c)$$

e si deve risolvere il sistema lineare di Cramer

$$\begin{cases} 2a+b+2c=1 \\ -a+4b+2c=0 \\ 3a+c=0 \end{cases}$$

che fornisce la soluzione $(-\frac{4}{9},-\frac{7}{9},\frac{4}{3})$.
Analogamente, da

$$(0,1,0)=(2a+b+2c,-a+4b+2c,3a+c)$$

e

$$(0,0,1)=(2a+b+2c,-a+4b+2c,3a+c)$$

si ottengono le terne $(\frac{1}{9},-\frac{4}{9},\frac{1}{3})$ e $(\frac{2}{9},\frac{2}{3},-1)$, da cui la matrice del cambiamento di base é

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$