Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ing. Civile

1° Test di GEOMETRIA del 10.11.2015

1. In $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice del cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{C}$ alla base $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),(0,-2,3),(3,1,0)\}$ e viceversa.

Si ha
$(1,0,0) = \frac{1}{2}(1,-1,1) - \frac{1}{6}(0,-2,3) + \frac{1}{6}(3,1,0)$,

$(0,1,0) = -\frac{3}{2}(1,-1,1) + \frac{1}{2}(0,-2,3) + \frac{1}{2}(3,1,0)$,

$(0,0,1) = -1(1,-1,1) + \frac{2}{3}(0,-2,3) + \frac{1}{3}(3,1,0)$.
Allora

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si ha poi immediatamente

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 3x + kz = 2 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

Per quanto riguarda la matrice dei coefficienti si ha

$$Det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & k \end{pmatrix} = 2k-3.$$

Allora per tuttu i valori reali di k, tranne $k = \frac{3}{2}$, il sistema è di Cramer ed ammette l'unica soluzione

$$\left(\frac{Det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{2k-3}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & k \end{pmatrix}}{2k-3}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2k-3}\right).$$

Nel caso $k = \frac{3}{2}$ il sistema diviene

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ 2x + z = 0 \\ 6x + 3z = 4 \end{cases}$$

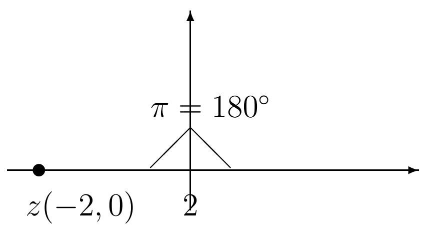
e la matrice completa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, pertanto in base al Teorema di Rouche-Capelli, non esistono soluzioni

3. Determinare le radici quarte del numero complesso $z = -2$.

La forma trigonometrica di z :



quindi

$$z = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Allora se $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, risulta $x^4 = z$ quando

$$r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2(\cos\pi + i\sin\pi),$$

ovvero

$$r = \sqrt[4]{2} \quad \text{e} \quad 4\theta = \pi + 2k\pi,$$

quindi

$$\theta = \frac{(1+2k)\pi}{4}, \;\; k = 0, 1, 2, 3.$$

Le radici quarte di z sono:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}),\\
x_1 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\sin\tfrac{3}{4}\pi),\\
x_2 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{5}{4}\pi + i\sin\tfrac{5}{4}\pi),\\
x_3 &= \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{7}{4}\pi + i\sin\tfrac{7}{4}\pi).
\end{aligned}$$

4. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x,y,z) = (x - 2y + 3z, 2x + y - z, y + z)$, provare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.

Se $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = a \\ 2x + y - z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti ha determinante pari a

$$Det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 12.$$

Allora il sistema è di Cramer, pertanto l'applicazione data è invertibile. L'inversa si calcola come segue:
la soluzione unica del sistema è la terna

$$\left(\frac{Det\begin{pmatrix} a & -2 & 3 \\ b & 1 & -1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}}{12}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & b & -1 \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix}}{12}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}}{12}\right).$$

Allora $L^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$\mathrm{L}^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{Det\begin{pmatrix} x & -2 & 3 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}}{12}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & y & -1 \\ 0 & z & 1 \end{pmatrix}}{12}, \frac{Det\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}}{12}\right).$$