FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

APPELLO DI GEOMETRIA DEL 11.02.2013

SOLUZIONI PROPOSTE

---

1. Determinare i valori del parametro reale t per cui esiste ed è unica l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che

- $L(1, -1, 1) = (1, 0, 0.1)$,
- $L(2, 1, -2) = (0, 1, 1, 0)$,
- $L(0, t-3, t^2+t+2) = (t+7, -2, -2, -\frac{2}{3}t(t+5))$.

Tra le applicazioni trovate individuare quelle iniettive.

Affinchè esista un'unica applicazione soddisfacente le richieste i vettori $(1, -1, 1), (2, 1, -2), (0, t-3, t^2+t+2)$ devono costituire una base di $\mathbb{R}^3$. Questo accade quando

$$Det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & t-3 & t^2+t+2 \end{pmatrix} \neq 0$$

ovvero per tutti i valori reali di t con $t \neq -3,\ \frac{2}{3}$.
In base alla formula di Grassman sulle dimensioni, un'applcazione $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ è iniettiva esattamente quando la sua immagine ha dimensione 3. Poichè

$$Im(L) =< (1, 0, 0.1), (0, 1, 1, 0), (t+7, -2, -2, -\frac{2}{3}t(t+5) >$$

si dovrà richiedere che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ t+7 & -2 & -2 & -\frac{2}{3}t(t+5) \end{pmatrix}$$

abbia rango 3. Questo accade quando $t \neq -3, -\frac{7}{2}$. Infine le applicazioni lineari iniettive cercate si ottengono per tutti i valori real di t, tranne $t = \frac{2}{3}, -3, -\frac{7}{2}$.

2. Considerate le rette

$$r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ y - z - 5 = 0 \end{cases},$$

verificare se esse sono complanari o meno ed in caso affermativo determinare il piano che le contiene.

Si osservi che le rette date sono parallele avendo entrambe parametri direttori del tipo $(1, 1, 1)$, pertanto sono complanari. I fasci di piani di asse r ed s hanno equazioni, rispettivamente,

$$(k + 1)x - y - kz + 1 = 0$$

$$x + (h - 1)y - hz - 2 - 5h = 0$$

Le due equazioni rappresentano lo stesso piano quando sono equivalenti, cioè quando la matrice

$$\begin{pmatrix} k+1 & -1 & -k & 1 \\ 1 & h-1 & -h & -2-5h \end{pmatrix}$$

ha rango 1. Annullando i minori del secono ordine si ottiene $k = -\frac{3}{7}$ e $h = -\frac{3}{4}$.

3. Nel fascio di circonferenze tangenti alla circonferenza

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

nell'origine, determinare quelle aventi raggio $r = \sqrt{2}$.

La tangente a $\mathcal{C}$ nell'origine ha equazione $x + y = 0$. Si può costruire il fascio di circonferenze tangenti a tale retta nell'origine e passanti per i punti

impropri $C_1(1, i, 0)$ e $C_2(1, -i, 0)$ (tutte le circonferenze del piano contengono i punti ciclici).
Le coniche degeneri sono allora:

- $\mathcal{C}_1$ costituita dalla retta impropria e dalla retta tangente, di equazione

$$(X + Y)T = 0,$$

- $\mathcal{C}_2$ costituita dalla retta per O e C_1 e da quella per O e C_2 (le rette isotrope per l'origine), di equazione

$$(Y - iX)(Y + iX) = 0.$$

L'equazione del fascio è allora

$$(X + Y)T + k(Y^2 + X^2) = 0,$$

quindi

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{k}x + \frac{1}{k}y = 0,$$

in coordinate cartesiane. Tale circonferenza ha centro nel punto $C(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k})$.
La circonferenza di centro C e raggio $\sqrt{2}$ ha equazione

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{k}x + \frac{1}{k}y + \frac{1}{k^2} - 2 = 0.$$

Da $\frac{1}{k^2} - 2 = 0$ si ottiene $k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Le circonferenze richieste sono quindi due.
