Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 11.02.2014

Soluzioni Proposte

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $\mathcal{C}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B} = \{(1,-1,1), (0,1,2), (2,0,0)\}$. Dopo aver verificate che L è biiettiva determinarne l'inversa.

Basta osservare che la matrice data ha determinante non nullo per assicurarsi che L è biiettiva. Si ha

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x-y, y+z, 2x+z).$$

Allora

$$L(x,y,z) = (x-y)(1,-1,1) + (y+z)(0,1,2) + (2x+z)(2,0,0) =$$

$$= (5x - y + 2z, -x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Considerato il sistema di Cramer

$$r : \begin{cases} 5x - y + 2z = a \\ -x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases},$$

che ha soluzione $(\frac{3a+4b-5c}{6}, \frac{3a+8b-7c}{6}, \frac{-3a-6b+9c}{6})$, si ottiene infine

$$L^{-1}(x,y,z) = (\frac{3x+4y-zc}{6}, \frac{3x+8y-7z}{6}, \frac{-3z-6y+9z}{6})$$

2. Discutere ed eventualmente risovere il sistema

$$r : \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ y + z = k \\ (k-1)x + y + kz = 0 \end{cases},$$

al variare del parametro reale k.

La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante pari a $(k-1)(3-k)$. Allora per tutti i valori reali del parametro k, tranne $k = 1, 2$ il sistema dato è di Cramer ed ammette un'unica soluzione (basta lasciarla indicata, senza svolgere calcoli). Per $k = 1$ la matrice dei coefficienti ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango $3 :$ non ci sono soluzioni. Per $k = 3$ si ha la stessa situazione e, anche in questo caso non ci sono soluzioni.

3. Determinare la retta per $P(1, -2, 3)$ parallela al piano $\pi : 2x - y - 2z + 7 = 0$ ed incidente la retta impropria del piano $\sigma : x + 3y + z - 5 = 0$

Il fatto che la retta cercata debba essere incidente la retta impropria del piano σ equivale a dire che essa deve essere parallela al piano σ . Allora essa si ottiene come intersezione del piano per P parallelo a π e del piano per P parallelo a σ.

4. Si consideri la curva algebrica

$$\mathcal{C} : x^3 + 4y^3 - 3x^2y + x^2 + 4y^2 - 4xy = 0,$$

e se ne studino i punti impropri. Verificare poi che $P(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$ è un punto triplo di $\mathcal{C}$, dedurne che $\mathcal{C}$ è riducibile e trovarne le componenti.

I punti impropri sono quelli delle rette per l'origine la cui equazione complessiva è $x^3 + 4y^3 - 3x^2y = 0$. Posto $t = \frac{y}{x}$, l'equazione $4t^3 - 3t + 1 = 0$, si scrive come $(t + 1)(2t - 1)^2 = 0$. Quindi

$$x^3 + 4y^3 - 3x^2y = (x + y)(x - 2y)^2$$

Dal che si ricava che i punti impropri sono $P_\infty(1,-1,0)$ ed $Q_\infty(2,1,0)$, dei quali il secondo contato due volte. Si ha

$$F_X = 3X^2-6XY+2XT-4YT,\ F_Y = -3X^2+12Y^2-4XT+8YT,\ F_T = X^2+4Y^2-4XY,$$

quindi

$$F_X(P_\infty)=9,\ F_Y(P_\infty)=9,\ F_T(P_\infty)=9,$$

$$F_X(Q_\infty)=0,\ F_Y(Q_\infty)=0,\ F_T(Q_\infty)=0.$$

Allora P_∞ è un punto semplice (con tangente la retta di equazione $x+y+1$) mentre Q_∞ è un punto doppio (con tangente la retta di equazione $x=2y$). Si ha ancora

$$f_x = 3x^2-6xy+2x-4y,\ f_y = -3x^2+12y^2+8y-4x,$$

$$f_{xx} = 6x-6y+2,\ f_{yy} = 24y^2+8,\ f_{xy} = f_{yx} = -6x-4,$$

le quali si annullano tutte in P mentre, ad es., $f_{xyx}(P) \neq 0$. Segue che punto P è effettivamente triplo. Essendo la curva di grado 3, essa deve essere costituita dalla retta per P e P_∞ e dalla retta per P e $Q_\infty(2,1,0)$, quest'ultima contata due volte:

$$C : (x+y+1)(x-2y)^2 = 0.$$