Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 11.02.2016

---

1. Siano

$$\mathcal{B} = \{(1,-2),(3,0)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(1,-1,-1),(1,0,-2),(0,0,1)\},$$

basi di $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$, rispettivamente.

- Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

- Determinare nucleo ed immagine di L.

Deve essere

$$L(x,y)_{\mathcal{B}'} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L)(x,y)_{\mathcal{B}}.$$

Da $(x,y) = -\frac{1}{2}y(1,-2) + (\frac{1}{3}x + \frac{1}{6})y(3,0)$ segue

$$L(x,y)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y \end{pmatrix} = (-2y, x + \frac{3}{2}y, -2x - 2y),$$

allora

$$L(x,y) = -2y(1,-1,-1) + (x + \frac{3}{2}y)(1,0,-2) + (-2x-2y)(0,0,1) = ...$$

2. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano ortogonale da $R(O,x,y,z)$ a $R'(O',x',y',z')$ e viceversa, essendo

$$x' : \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}, \qquad y' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases},$$

rispettivamente orientate nel verso delle y decrescenti e delle x crescenti. I due riferimenti sono contraversi.

Si ha $x'(1, 1, -1)$ ed $y'(1, -1, 0)$, mentre per z', dovendo essere ortogonale a x' ed y', si ha $z'(1, 1, 2)$. Allora

$$i'(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), \qquad j'(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \qquad k' = (\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}).$$

Poichè i sistemi devono essere contraversi si sceglierà $k' = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}})$. si ha inoltre $x' \cap y' = O'(1, 1, \frac{1}{2})$, pertanto le equazioni del cambiamento di riferimento daR' ad R sono date da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

....

3. Studiare la curva algebrica di equazione

$$x^4y - x^2y^3 - x^2y + 2x = 0$$

nei suoi punti impropri e nell'origine.

La curva è riducibile come

$$x(x^3y - xy^3 - xy + 2) = 0$$

ed i suoi punti impropri sono quello dell'asse y delle rette di equazione complessiva

$$x^3y - xy^3 = 0.$$

Quindi ancora Y_∞ che quindi conta due volte, più i punti $P_\infty(1,1,0)$ e $Q_\infty(1,-1,0)$. Per mezzo delle derivate parziali si ricava che gli ultimi due sono punti semplici, come pure l'origine, e di conseguenza si calcolano le tangenti. Intersecando la retta $x = k$ con il ramo della curva $x^3y-xy^3-xy+2 = 0$ si ottiene l'equazione $ky^3 - (k^3 + k)y + 2 = 0$. Pertanto delle cinque intersezioni della curva con la retta due cadono sempre in Y_∞, che quindi è punto doppio. Le due tangenti coincidono con l'asse y (cioè per $k = 0$).