Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 11.07.2017 -

---

1. Nello spazio vettoriale $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ si consideri il sottinsieme

$$U = \{ \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & y & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Provare che U un sottospazio e determinarne la dimensione ed una base.

L'insieme U è certamente un sottospazio poichè

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & y & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & x' & 0 \\ 0 & y' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' & x+x' & 0 \\ 0 & y+y' & y+y' \end{pmatrix} \in U$$

e

$$\lambda \begin{pmatrix} x & x & 0 \\ 0 & y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda y & \lambda y \end{pmatrix} \in U.$$

È poi evidente che le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base per U.

2. Determinare la distanza tra i due piani $\alpha : 2x - 3y + 4z - 2 = 0$ e $\beta : 2x - 3y + 4z + 5 = 0$. Determinare inoltre il piano γ parallelo ed equidistante da α e β.

Si può ad es. ragionare nel modo seguente. Si prende un punto qualunque $A \in \alpha$ e si costruisce la retta per A ortogonale ai due piani. Questa incontra β nel punto B. Allora la distanza tra idue piani è pari al modulo del vettore AB. Se poi M è il punto medio del segmento AB il piano γ è quello per M con parametri di giacitura $(2, -3, 4)$.

3. Determinare, se esiste, una parabola bitangente alla conica $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+2y^2-1=0$ nei punti di intersezione con la retta $r: x-y=0$.

Siano A e B i punti di intersezione della conica con la retta. Dette t_A e t_B le tangenti a $\mathcal{C}$ nei due punti, il fascio utile è quello bitangente a t_A e t_B in A e B. Quindi le coniche che lo generano sono

$$\mathcal{C}_1 = t_A \cup t_B \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = (r)^2$$

oppure

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_2 = (r)^2$$

poichè anche $\mathcal{C}$ è una conica del fascio.
Ottenuta l'equazione del fascio si impone la condizione per avere parabole e si ricavano eventualmente i valori corrispondenti del parametro.

4. Considerate la basi di $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(0,0,1),(2,1,-1),(0,3,0)\}, \quad B' = \{(1,1,1),(2,0,-1),(1,0,0)\},$$

determinare le matrici del cambiamento di base da B a B' e viceversa.

Troppo facile! Si tratta solo di scrivere i vettori di una base come combinazione lineare dei vettori dell'altra base.