Prova Scritta di GEOMETRIA del 12 Gennaio 2005
Soluzioni Proposte

1. Assegnate le applicazioni lineari $f : R^3 \to R^3$ rappresentata dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

relativamente alla base canonica di R^3 e $g : R^3 \to R^2$ definita da

$$g(x, y, z) = (3x - y, z + x),$$

stabilire se $g \circ f$ risulta suriettiva.

L'applicazione lineare f si ottiene come segue :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 3y, 2x + z, 2x - 6y + 2z).$$

Allora

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(x + 3y, 2x + z, 2x - 6y + 2z) =$$

$$= (x + 9y - z, 3x - 3y + 2z).$$

Segue che

$$Im(g \circ f) = \{(x + 9y - z, 3x - 3y + 2z) | x, y, z \in R\} = \dots$$

$$\dots =< (1, 3), (9, -3), (-1, 2) > .$$

Si vede facilmente che ImL ha dimensione 2, cosicche' $g \circ f$ e' suriettiva.

2. Stabilire per quali valori reali di k il seguente sistema lineare ha soluzioni

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 5x + 2y = 0 \\ 2kx + (k - 1)z = 2k \end{cases}$$

ed eventualmente determinarle

La matrice dei coefficienti del sistema :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2k & 0 & k-1 \end{pmatrix}$$

ha determinante che vale $-3(k-1)$. Allora, per tutti i valori reali di k, con $k \neq 1$, il sistema corrispondente e' di Kramer ed ammette un'unica soluzione che si calcola al solito modo.
Nel caso $k = 1$, la matrice completa del sistema ha rango 3 :

$$Det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \neq 0,$$

In base al Teor. di R.-C., il sistema non ammette in tal caso soluzioni.

3. Determinare un'equazione cartesiana per la parabola tangente in $P(1, 2)$ alla retta $r : 2x - 3y + 4 = 0$, passante per il punto improprio dell'asse y e per il punto $Q(3, 1)$.

Si puo' costruire il fascio di parabole bitangenti alla retta impropria nel punto $Y_\infty(0, 1, 0)$ ed alla retta data nel punto $P(1, 2, 1)$. Una conica degenere del fascio e' quindi data da $(2X - 3Y + 4T)T = 0$, mentre l'altra e' data dalla retta per P e Y_∞ contata due volte, cioe' $(X - T)^2 = 0$. L'equazione del fascio si scrive

$$(2X - 3Y + 4T)T + \lambda(X - T)^2 = 0.$$

Il passaggio per $Q(3, 1, 1)$ fornisce il valore $\lambda = -\frac{7}{4}$.

4. Determinare due vettori geometrici u e v, il primo parallelo al piano $\pi : x - y + z = 0$ ed il secondo parallelo all'asse z, tali che $u + v = (1, 2, 3)$.

Poiche' il vettore $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ deve essere parallelo al piano dato di parametri di giacitura $(1, -1, 1)$, si deve avere $\alpha - \beta + \gamma = 0$, cioe' $\beta = \alpha + \gamma$. Quindi $u = (\alpha, \alpha + \gamma, \gamma)$. Il vettore v, per essere parallelo all'asse z, avra' coordinate del tipo $(0, 0, t)$.
Infine deve essere $u + v = (\alpha, \alpha + \gamma, \gamma + t) = (1, 2, 3)$, cioe'

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \gamma = 2 \\ \gamma + t = 3 \end{cases}$$

da cui segue $u = (1, 2, 1)$ e $v = (0, 0, 2)$.

L.S.