Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 12..02.2015

---

1. Determinare un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L(1, -1, 1) = (2, 1), \quad L(2, 0, 1) = (-1, 3).$$

I vettori $(1, -1, 1)$ e $(2, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, perciò si ottiene una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo, ad es., il vettore $(0, 0, 1)$. Allora esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L(1, -1, 1) = (2, 1), \quad L(2, 0, 1) = (-1, 3)$$

e, ad es.,

$$L(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Per $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$(x, y, z) = -y(1, -1, 1) + \frac{x+y}{2}(2, 0, 1) + \frac{-2x+y+2z}{2}(0, 0, 1),$$

allora

$$L(x, y, z) = -y(2, 1) + \frac{x+y}{2}(-1, 3) + \frac{-2x+y+2z}{2}(0, 0) =$$

$$= (\frac{-5x-y}{2}, \frac{3x+3}{2})$$

è una delle applicazioni lineari come richiesto.

2. Determinare il piano per la retta

$$s : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + z + 1 = 0 \end{cases} ,$$

che stacca sull'asse z un segmento di lunghezza 2.

Il fascio di piani di asse la retta s ha equazione

$$k(x + 2y - 3z) + 3x - y + z + 1 = 0.$$

Il piano generico del fascio interseca l'asse z nel punto $P(0, 0, z_0) = (0, 0, 2)$.
Da

$$s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ k(x + 2y - 3z) + 3x - y + z + 1 = 0 \end{cases} ,$$

si ottiene $-6k + 3 = 0$, ovvero $k = 2$. In corrispondenza di tale valore del parametro si individua l'equazione del piano cercato.
Si ottiene un secondo piano imponendo il passaggio per il punto $Q(0, 0, z_0) = (0, 0, -2)$.

3. Determinare l'iperbole equilatera tangente alla retta $r : x - 2y + 3 = 0$ nel punto $P(-1, 1)$, passante per l'origine e per il punto improprio della retta congiungente i punti $R(1, 3)$ e $S(-2, 5)$.

I parametri direttori della retta RS sono evidentemente $(-3, 2)$ pertanto tale retta ha punto improprio $A_\infty(-3, 2, 0)$. Il punto $B_\infty(2, 3, 0)$ è quello che individua la direzione ortogonale rispetto a quella di A_∞. L'iperbole equilatera cercata contiene questi due punti pertanto essa appartiene al fascio di iperboli equilatere tangenti alla retta r nel suo punto $P(-1, 1)$ e passanti per A_∞, B_∞.
Una conica degenere del fascio è costituita dalla retta r e dalla retta impropria, l'altra è spezzata nelle rette PA_∞ e PB_∞. L'ulteriore condizione di passaggio per l'origine risolve il problema.