FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello Straordinario di GEOMETRIA del 12.04.2013

---

1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ si provi che i sottospazi

$$W = \{(x - y, 5y, 2x + 3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad U =< (0, 5, 5), (-2, 5, 1) >$$

coincidono.
Determinare poi un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $L(1, 0, 2) = L(-1, 5, 3) = (1, -3)$ e verificare direttamente che $L(u) \in< (1, -3) >$, per ogni $u \in U$.

Si ha $W =< (1, 0, 2), (-1, 5, 3) >$. I due vettori $(0, 5, 5), (-2, 5, 1)$ sono linearmente indipendenti ed essendo

$$rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

si ha $W = U$.
Per la seconda richiesta: basta estendere $(1, 0, 2), (-1, 5, 3)$ ad una base di $\mathbb{R}^3$, ad es. con il vettore $(0, 0, 1)$ e richiedere, ad es., che $L(0, 0, 1) = (1, 1)$. Allora l'applicazione cercata è

$$L(x, y, z) = (-x - \frac{3}{5}y + z, -5x - \frac{11}{5}y + z),$$

Si ha

$$L(x - y, 5y, 2x + 3y) = (x + y)(1, -3).$$

2. Siano $R(O, x, y)$, $R'(O', x', y')$ riferimenti cartesiani ortogonali contraversi. Sapendo che l'asse x' è la retta di equazione $2x - y + 1 = 0$, orientata nel verso delle ordinate decrescenti e che $O'(-3, 1)$, determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R. Determinare inoltre le coordinate di O in R'.

L'asse y' è la retta per O' ortogonale ad x', che ha equazione $x+2y+1=0$. Il versore di x' è il vettore di coordinate $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. Quello di y' ha coordinate $(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, poichè

$$det \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -1.$$

Allora le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R sono

$$\begin{cases} x = -3 - \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}.$$

Si noti poi che l'asse x e l'asse y hanno in R' equazioni rispettivamente

$$2x' - y' - \sqrt{5} = 0, \quad x' + 2y' + 3\sqrt{5} = 0.$$

Intersecando le due rette si trovano le coordinate di O in R': $(-\frac{13}{3}\sqrt{5}, \frac{5}{3}\sqrt{5})$.

3. Studiare la curva algebrica di equazione

$$x^4 - 2x^3y + x^2y^2 - 3x^2 - x + y = 0$$

nell'origine e nei suoi punti impropri.

Riscrivendo l'equazione della curva come

$$x^2(x-y)^2 - 3x^2 - x + y = 0$$

si ottiene che i punti impropri sono:
- quello dell'asse y, ovvero Y_∞, contato due volte,
- quello della retta di equazione $x - y = 0$, ovvero $P_\infty = (1, 1, 0)$, contato due volte.

- La generica retta per Y_∞ ha equazione $x = k$ ed incontra la curva nei punti propri la cui ordinata è fornita dall'equazione

$$k^2y^2 + (1 - 2k^3)y + k^4 - 3k^3 - k = 0.$$

Si ricava che Y_∞ è un punto doppio (cuspide) con le due tagenti coincidenti con l'asse y.
- La generica retta per P_∞ ha equazione $y = x + k$ ed incontra la curva nei punti propri la cui ascissa è fornita dall'equazione

$$(k^2 - 3)x^2 + k = 0.$$

Si ricava che P_∞ è un punto doppio con tagenti le rette di equazione $y = x + \sqrt{3}$ ed $y = x - \sqrt{3}$.
L'origine è punto semplice con tangente la retta di equazione $x = y$.