Soluzioni della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 12.06.2009

1. Verificare se esiste un'applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ tale che

   L(1,1,1)= (0,2,2), L(2,0,-1)=(4,4,0)

   L(0,-2,-1)=(0,0,4), L(1,0,-1)=(2,2,1).

I vettori $(1,1,1)$, $(0,-2,-1)$, $(2,0,-1)$ costituiscono una base per $\mathtt{R}^3$, pertanto esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ tale che

$$L(1,1,1) = (0,2,2),$$

$$L(0,-2,-1) = (0,0,4).$$

$$L(2,0,-1) = (4,4,0),$$

Se $(x,y,z) \in \mathtt{R}^3$, si ha

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,-2,-1) + c(2,0,-1) = (a+2c, a-2b, a-b-c),$$

da cui si ricava

$$(x,y,z) = \frac{x-y+2z}{2}(1,1,1) + \frac{x-3y+4z}{4}(0,-2,-1) + \frac{x+y-2z}{4}(2,0,-1).$$

Allora

$$L(x,y,z) = \frac{x-y+2z}{2}(0,2,2) + \frac{x-3y+2z}{4}(0,0,4) + \frac{x+y-2z}{4}(4,4,0) =$$

$$= (x+y-2z, 2x, 2x-4y+4z).$$

Infine

$$L(1,0,-1) = (3,2,-2),$$

pertanto l'applicazione richiesta non esiste.

2. Determinare l'iperbole equilatera avente per asintoto la retta r : $2x - y + 1 = 0$ e tangente alla retta $s : x - 2y + 3 = 0$ nel punto $S(-1, 1)$.

Si può costruire il fascio di coniche bitangenti alla retta r nel suo punto improprio $R_\infty(1, 2, 0)$ ed alla retta s in S. Le coniche degeneri del fascio sono, una costituita dalle rette r ed s, e l'altra dalla retta per R_∞ ed S, contata due volte. L'equazione del fascio è allora

$$\mathcal{F}: \quad (2X - Y + T)(X - 2Y + 3T) + k(2X - Y + 3T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per il punto $R_\infty(2, -1, 0)$, che indica la direzione ortogonale rispetto a R_∞, si ottiene $k = -\frac{4}{5}$.

3. Determinare il vettore parallelo al piano $\pi : 2x - y - z = 0$, al piano $\sigma : x - 3y + z + 1 = 0$ ed avente modulo $5\sqrt{2}$.

I parametri direttori dei due piani sono, rispettivamente $(2, -1, -1)$, $(1, -3, 1)$. Se $v = (a, b, c)$ è il vettore in questione, si deve avere

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

Allora $v = (a, \frac{3}{4}a, \frac{3}{5}a)$. Poichè $|v| = \frac{5}{4}\sqrt{2}a$, si ricava $v = (4, 3, 5)$.

4. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare del parametro reale k, il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} 4kx - y + 2z = k \\ 4x + ky - 2kz = k^2 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} 4k & -1 & 2 \\ 4 & k & -2k \end{pmatrix}$$

ha rango determinato dai due minori

$$\begin{pmatrix} 4k & -1 \\ 4 & k \end{pmatrix} = 4k^2 + 4, \qquad \begin{pmatrix} 4k & 2 \\ 4 & -2k \end{pmatrix} = -8k^2 - 8$$

che non sono mai nulli, per alcun valore di k. Allora il sistema è sempre risolubile. Si può, ad es., considerare il sistema di Cramer associato

$$\begin{cases} 4kx - y = -2z + k \\ 4x + ky = 2kz + k^2 \end{cases}$$

e risolvere al solito modo.