Prova Scritta di GEOMETRIA del 12 Settembre 2005
Soluzioni Proposte

1. Considerati i seguenti due sottospazi di R^3

$$U = \{(x, y, z) : x - y = 0\}, \quad W =< (3, 0, 1), (1, 1, 0) >$$

determinare la dimensione ed una base di $U \cap W$.

Si ha $W = \{(x, y, z) = (3\alpha + \beta, \beta, \alpha) : \alpha, \beta \in R\}$. Un elemento di W appartiene ad U se e solo se $3\alpha + \beta - \beta = 0$, cioe' $\alpha = 0$. Allora

$$U \cap W = \{(3\alpha + \beta, \beta, \alpha) : \alpha = 0\} = \{\beta(1, 1, 0) : \beta \in R\} =< (1, 1, 0) > .$$

Segue che una base di $U \cap W$ e' data dal vettore $(1, 1, 0)$ e $dim(U \cap W) = 1$.

2. Stabilire per quali valori reali di h il seguente sistema lineare ha soluzioni

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2hy + z - ht = 3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema ha evidentemente rango 2, qualunque sia il valore di h. Lo stesso dicasi per la matrice completa. Quindi il sistema e' sempre risolubile, con insieme di soluzioni di "dimensione" 2. Si risolve il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + z = y - 2t \\ z = 3 - 2hy + ht \end{cases}$$

ove y e t si intendono trattati come parametri reali. Allora le soluzioni del sistema di partenza sono tutte le quaterne

$$(-3 + (1 + 2h)y - (h - 2)t, y, 3 - 2hy + ht, t)$$

per ogni $y, t \in R$.

3. Determinare, se esistono, due vettori geometrici, u e v, il primo parallelo al piano xz, il secondo parallelo alla retta di equazioni $x - 1 + = 2z,\ y = z - 3$.

Un vettore $\mathbf{u} = (a, b, c)$ parallelo al piano $y = 0$ deve essere tale che $(a, b, c) \cdot (0, 1, 0) = 0$, quindi $\mathbf{u} = (a, 0, c)$ [$(0, 1, 0)$ e' la terna di parametri di giacitura del piano]. I parametri direttori della retta data sono invece $(2, 1, 1)$, quindi $\mathbf{v} = (2d, d, d)$. Si ha poi $(a, 0, c) + (2d, d, d) = (0, 1, 0)$, da cui

$$\begin{cases} a + 2d = 0 \\ d = 1 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

quindi $\mathbf{v} = (2, 1, 1)$ e $\mathbf{u} = (-2, 0, -1)$.

4. Determinare un'equazione cartesiana per l'iperbole equilatera avente come asintoto l'asse xe tangente in $P(2, 5)$ alla retta di equazione $x - y + 3 = 0$.

La iperbole cercata appartiene al fascio di coniche bitangenti all'asse x nel suo punto improprio $X_\infty(1, 0, 0)$ ed alla retta data nel punto P. Essa viene poi determinata dal passaggio per il punto improprio $Y_\infty(0, 1, 0)$ che indica la direzione ortogonale a quella dell'asse x. Le coniche degeneri del fascio sono, una $\mathcal{G}_1$ costituita dall'asse X e dalla retta $X - Y + 3T = 0$ e l'altra $\mathcal{G}_2$ dalla retta per P e per $X_\infty(1, 0, 0)$, contata due volte.