Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 13.01.2017

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$L(x, y, z) = (x + 2y, kx - kz, (k + 1)y, z).$$

Determinare i valori del parametro reale k per cui L risulta iniettiva. Esistono valori di k per cui $dim\ Ker(L) = 2$?

Il nucleo di L coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ kx - kz = 0 \\ (k+1)y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & -k \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ha sempre rango almeno due, fornito dal minore

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Orlando nei due modi possibili tale minore si ottengono le due matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $D(B_1) = -2k$ e $D(B_2) = k+1$. Allora è chiaro che la matrice A ha rango pari a 3 per qualunque valore di k, quindi ikl sistema dipoartenza ammette la sola soluzione nulla per ogni k, cosicchè L è sempre iniettiva

2. Considerata la conica di equazione

$$2x^2 - y^2 + xy + x + y = 0,$$

provare che essa è degenere e determinarne le componenti.

La matrice della conica

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

ha determinante nullo, pertanto la conica è degenere.
Si ha

$$2x^2 - y^2 + xy = (x + y)(2x - y),$$

la conica è costituita da due rette del tipo

$$x + y + h = 0 \quad \text{ed} \quad 2x - y + k = 0.$$

Poichè

$$(x + y + h)(2x - y + k) = 2x^2 - y^2 + xy + (k + 2h)x + (k - h)y + hk,$$

risolvendo il sistema

$$\begin{cases} k + 2h = 1 \\ k - h = 1 \end{cases}$$

si ricava che le due rette cercate sono

$$x + y = 0 \quad \text{ed} \quad 2x - y + 1 = 0.$$

3. Determinare se esistono piani contenenti la retta

$$r : \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

formanti un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il piano π di equazione $z = 0$.

Il generico piano contenente la retta r ha equazione

$$x - 2y + z + 1 + k(x - z) = 0$$

cioè

$$(1 + k)x - 2y + (1 - k)z + 1 = 0.$$

La condizione perchè esso formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ col piano dato si scrive

$$\cos r\pi = \frac{1 - k}{\sqrt{(1 + k)^2 + 4 + (1 - k)^2}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dall'ultima si ricava $k^2 - 4k - 1 = 0$, ...