FACOLTÀ di INGEGNERIA
Prova Scritta di GEOMETRIA del 13 Settembre 2007
Soluzioni proposte

[**1**] Sia $\mathbf{L} : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$ l'applicazione lineare definita dalla seguente matrice

$$M_B^C(L) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ove $\mathbf{C}$ indica la base canonica di $\mathbf{R^2}$ e $\mathbf{B} = \{(\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{2}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{0})\}$. Determinare **ImL**.

Si ha

$$L(x, y)_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot (x, y) = (3x + 2y, x, x + y).$$

quindi

$$L(x, y) = (6x + 5y.2x + y, 7x + 4y).$$

Segue

$$Im(L) = \{(6x + 5y.2x + y, 7x + 4y) \mid x, y \in R\} =< (6, 2, 7), (5, 1, 4) >$$

e poiché i due vettori che la generano sono linearmente indipendenti, segue che $\dim Im(L) = 2$.

[**2**] Stabilire per quali valori del parametro reale $\mathbf{k}$ il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} \mathbf{x - 3y + 2z = 0} \\ \mathbf{x + ky + 4z = 1} \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle.

La matrice dei coefficenti e la matrice completa del sistema hanno sempre rango 2. Quindi il sistema ammette sempre soluzioni. Si considera il sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x + 2z = 3y} \\ \mathbf{x + 4z = 1 - ky} \end{cases}$$

il quale ammette l'unica soluzione $\left(\frac{\begin{pmatrix} 3y & 2 \\ 1-ky & 4 \end{pmatrix}}{2}, \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3y \\ 1 & 1-ky \end{pmatrix}}{2}\right)$. Il sistema di partenza ammette quindi, qualunque sia k. l' insieme di soluzioni

$$S = \{(\frac{\begin{pmatrix} 3y & 2 \\ 1-ky & 4 \end{pmatrix}}{2}, y, \frac{\begin{pmatrix} 1 & 3y \\ 1 & 1-ky \end{pmatrix}}{2}) \mid y \in R\}.$$

[**3**] Nel fascio di coniche tangenti nell'origine alla retta $\mathbf{r} : \mathbf{x - y = 0}$, passanti per il punto improprio della retta $\mathbf{s} : \mathbf{x + y + 2 = 0}$ e per il punto $\mathbf{Q(0, 1, 1)}$, stabilire se ci sono parabole.

Costruiamo il fascio di coniche tangenti alla retta r in $O(0, 0)$ e con punti base il punto improprio $S_\infty(1, -1, 0)$ di $\mathbf{s}$ e Q. Una conica degenere del fascio é quindi costituita dalle rette r e QS_∞ e, l'altra dalle rette OS_∞ e OQ (asse y). L'equazione del fascio é quindi la seguente:

$$(X - Y)(X + Y - T) + kX(X + Y) = 0.$$

ovvero

$$(1 + k)X^2 - Y^2 + kXY - XT + YT = 0.$$

La condizione di tangenza alla retta impropria é $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, che nel caso si scrive $k^2 + k + 1 = 0$. Nel fascio dato non esistono quindi parabole (reali).

[**4**] Determinare due vettori geometrici, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, il primo perpendicolare al piano $\mathbf{xy}$, il secondo perpendicolare alla retta di equazioni

$$\begin{cases} \mathbf{x - y + 2 = 0} \\ \mathbf{z - y = 3} \end{cases}$$

e tali che $\mathbf{u + v = (1, 1, 2)}$.

Un vettore ortogonale ad un piano ha coordinate proporzionali ai parametri di giacitura del piano, quindi $u = (0, 0, t)$. I parametri direttori della retta sono $(1, 1, 1)$, quindi se $v = (a, b, c)$, la condizione di ortogonalitá é $c = -a-b$. Segue $v = (a, b, -a - b)$. L'ultima condizione fornita si traduce nel sistema

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ t - a - b = 2 \end{cases} ,$$

che fornisce $t = 4$. Allora $u = (0, 0, 4)$ e $v = (1, 1, -2)$.
