Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 13.09.2016

---

**1.** Al variare del parametro reale $k$, si consideri l'applicazione lineare

$$L_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L_k(x, y, z) = (kx + y + z, (2k - 1)x + ky, -kz).$$

Determinare i valori del parametro per cui $L_k$ è un isomorfismo e, nel caso, trovarne l'inversa.

---

$L_k$ è un isomorfismo esattamente quando la matrice

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 2k-1 & k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$$

ha rango massimo. Ciò accade per tutti i valori di $k$ tranne che per $k = 0$ e $k = 1$. Per tali valori di $k$, l'inversa di $L_k$ si ottiene risolvendo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} ka + b + c = x \\ (2k-1)a + kb = y \\ -kc = z \end{cases}.$$

**2.** Siano $R(O, x, y, z)$ e $R'(O', x', y', z')$ due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali contraversi. Sapendo che:

- $x'$ è la retta per il punto di coordinate $(2, 1, 0)$, ortogonale al piano $\pi : 2x - y + z + 5 = 0$, orientata nel verso delle $x$ crescenti,

- $y'$ è la retta per il punto di coordinate $(2, 1, 0)$, parallela a $\pi$ ed a $\sigma : 2y + 2z + 1 = 0$, orientata nel verso delle $y$ decrescenti, determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da $R$ ad $R'$ e viceversa.

---

La retta $x'$ ha parametri direttori pari a quelli di giacitura del piano $\pi$, cioè $(2,-1,1)$. Pertanto il suo versore è

$$i'(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

La retta $y'$ è certamente ortogonale a $x'$ e le condizioni di parallelismo col piano $\pi$ e col piano $\sigma$ forniscono le relazioni $2l - m + n = 0$ e $m + n = 0$, da cui $y'(1,1,-1)$. Allora

$$j'(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

La retta $z'$ per $O'(2,1,0)$ è ortogonale a $x'$ ed $y'$ ed ha parametri direttori $(0,1,1)$, pertanto $k'(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poichè i sistemi devono essere contraversi si ottiene

$$k'(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Le equazioni del cambiamento di riferimento da $R'$ ad $R$ sono allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Da queste si ricavano poi equazioni del cambiamento di riferimento da $R$ ad $R'$.

**3.** Tra le coniche tangenti alla circonferenza

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

in $P(1,0)$, determinare se esistono ellissi passanti per il centro di $\mathcal{C}$ e tangenti alla retta $r : x - 2y = 0$ in $Q(2,1)$.

---

La tangente a $\mathcal{C}$ in $P$ è l'asse $x : y = 0$. Costruiamo il fascio di coniche bitangenti all'asse $x$ in $P$ ed alla retta $r$ in $Q$. Le coniche degeneri:

- $\mathcal{C}_1 : y(x-2y) = 0$,
- $\mathcal{C}_2 = (PQ)^2 : (x-y-1)^2 = 0$.

Allora il fascio ha equazione

$$y(x-2y) + k(x-y-1)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per il centro $C(1,-2)$ di $\mathcal{C}$ si ottiene il valore $k = \frac{3}{8}$. L'unica conica che si trova nelle condizioni date ha equazione

$$3x^2 - 13y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0,$$

ed avendo due punti impropri reali e distinti, non è una ellisse.