Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Primo Test di GEOMETRIA del 13.11.2018

---

1. Considerata l'applicazione lineare

$$L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\ L(x,y,z,t)=(x-t,2x+y+t,-x+z-t,2x-y+z),$$

provare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.

L'applicazione è invertibile se per ogni $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ esiste un unico vettore $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ tale che $L(x,y,z,t)=(a,b,c,d)$. Questo accade precisamente se il seguente sistema lineare è di Cramer:

$$\begin{cases} x-t=a\\ 2x+y+t=b\\ -x+z-t=c\\ 2x-y+z=d \end{cases},$$

e così è poichè la matrice dei coefficienti ha determinante pari a 7.
L'unica soluzione del sistema è la quaterna

$$\left(\frac{2a+b-c-d}{7},\frac{-5a-2b+c-d}{7},\frac{-3a+2b+5c+2d}{7},\frac{-5a+b-c+d}{7}\right),$$

allora l'inversa di L è definita da

$$L^{-1}(x,y,z,t)=$$

$$=\left(\frac{2x+y-z-t}{7},\frac{-5x-2y+z-t}{7},\frac{-3x+2y+5z+2t}{7},\frac{-5x+y-z+t}{7}\right).$$

2. In $\mathbb{R}^3$ determinare le matrici del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e viceversa, essendo

$$\mathcal{B} = \{(1,3,0),(1,0,1),(2,-2,0)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(1,1,0),(-1,-2,1),(0,0,1)\}.$$

Si ha
- $(1,3,0) = -1(1,1,0) - 2(-1,-2,1) + 2(0,0,1)$,
- $(1,0,1) = 2(1,1,0) + 1(-1,-2,1) + 0(0,0,1)$,
- $(2,-2,0) = 6(1,1,0) + 4(-1,-2,1) - 4(0,0,1)$,

pertanto

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Analogamente
- $(1,1,0) = \frac{1}{2}(1,3,0) + 0(1,0,1) + \frac{1}{4}(2,-2,0)$,
- $(-1,-2,1) = -1(1,3,0) + 1(1,0,1) - \frac{1}{2}(2,-2,0)$,
- $(2,-2,0) = -\frac{1}{4}(1,3,0) + 1(1,0,1) - \frac{3}{8}(2,-2,0)$,

allora

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

3. Calcolare le radici quinte dell'unità in $\mathbb{C}$.

L'unità $1 = 1 + 0i$ ha modulo pari a 1 e argomento l'angolo nullo. Posto x=r$(\cos\phi + i\sin\phi)$, si ha $x^5 = 1$, quindi

$$r^5 = 1, \quad 5\phi = 0 + 2k\pi, \quad k = 0,1,2,3,4.$$

Allora $r = 1$ e

$$\phi = \frac{2k\pi}{5}.$$

Allora...