Prova Scritta di GEOMETRIA del 13.12.2006
Soluzioni Proposte

1. Siano $f : R^3 \to R^2$ e $g : R^2 \to R^4$ due applicazioni lineari tali che $f(x, y, z) = (x - z, y + z)$ e

$$M_C^C(g) = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

avendo indicato con C sia la base canonica di R^2 che quella di R^4. Determinare la dimensione ed una base di $Img \circ f$.

L'applicazione g é definita come segue:

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (5x, 3y, x + y, 3x).$$

Allora la composizione $g \circ f : R^4 \to R^2$ é data da

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z) = g(x - z, y + z)$$

$$= (5x - 5z, 3y + 3z, x + y, 3x - 3z)$$

Si ha $Im(T \circ L) = \{(5x - 5z, 3y + 3z, x + y, 3x - 3z) : x, y, z \in R\} = \dots$

$$= \{x(5, 0, 1, 3) + y(0, 3, 1, 0) + z(-5, 3, 0, -3) : x, y, z \in R\} =$$

$$=< (5, 0, 1, 3), (0, 3, 1, 0), (-5, 3, 0, -3) >$$

Poiché la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, dato ad es. dal minore $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, si ricava che $Im\ (T \circ L)$ ha dimensione 2 ed una sua base é costituita dai vettori $(5, 0, 1, 3), (0, 3, 1, 0)$

2. Stabilire per quali valori reali di h il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ hx + y = h \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle

La matrice completa del sistema

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ h & 1 & h \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $D(\tilde{A}) = h - 3$. Allora, per $h \neq 3$, in base al Teor. di R.-C., il sistema non ha soluzioni.
Nel caso $h = 3$ il sistema si riscrive

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

In questo caso matrice dei coefficenti e matrice completa hanno entrambe rango 2, dato ad es. dal minore $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Si considera il sistema di Cramer equivalente al precedente

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$$

la cui unica soluzione si calcola al solito modo.

3. Si scriva un'equazione omogenea per la conica avente come asintoto la retta $r\ : y - x + 1 = 0$ passante per il punti $P(1, 2, 1)$, $Q(0, 1, 0)$, e tangente all'asse y nel punto $R(0, 1, 1)$ alla retta $2x - y - 5 = 0$.

Costruiamo il fascio di coniche bitangenti alla retta $r : y - x + 1 = 0$ nel suo punto improprio $R_\infty(1, 1, 0)$ ed alla retta $x = 0$ nel suo punto $Q(0, 1)$. Le coniche degeneri sono allora costituite, una dalle due rette tangenti e l'altra dalla retta per Q e R_∞ contata due volte. Allora l'equazione del fascio é data da

$$(X - Y + T)X + k(X - Y + T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per $R(0,1,1)$ si ricava il valore del parametro e l'equazione cercata.

4. Scrivere equazioni cartesiane della retta passante per il punto $P(0,4,2)$, incidente l'asse x e parallela al piano $\pi : 3x - 2y + z = 0$.

La retta r cercata appartiene:
- al piano per P parallelo a $\pi : 3x-2y+z = 0$, cioé $\pi' : 3x-2y+z+6 = 0$,
- al piano per P del fascio di asse la retta $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ cioé $\sigma : y - 2z = 0$

La sua equazione é pertanto

$$\begin{cases} 3x - 2y + z + 6 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

L.S.