FACOLTÀ di INGEGNERIA
Prova Scritta di GEOMETRIA del 13 Dicembre 2007
Corsi di laurea: Civile, Informatica ed Elettronica

[1] Sia $L : R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita dalla seguente matrice

$$M_B^C(L) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ove C indica la base canonica di R^3 e $B = \{(1,2,0,0),(0,3,0,1),(0,2,2,1),(2,0,0,0)\}$. Stabilire se L è iniettiva e determinare una base di ImL.

Si ha

$$L(x,y,z)_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+3y+z, x+2z, -y+z, 2x+4z)$$

pertanto

$$L(x,y,z) =$$

$$= (2x+3y+z)(1,2,0,0)+(x+2z)+(0,3,0,1)+(-y+z)(0,2,2,1)+(2x+4z)(2,0,0,0) =$$

$$= (6x+3y+9z, 7x+4y+10z, -2y+2z, x-y+3z).$$

Segue che

$$ImL = \{(6x+3y+9z, 7x+4y+10z, -2y+2z, x-y+3z) |\ x,y,z \in R\} =$$

$$\langle(6,7,0,1),(3,4,-2,-1),(9,10,2,3)\rangle,$$

e poiché solo due dei tre vettori sono linearmente indipendenti, si ha che $dim\ ImL = 2$. Dalla formula di Grassmann segue che $dim\ KerL = 1$, quindi l'applicazione non é iniettiva.

[2] Stabilire per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ hx - 2y + (h+1)z = h - 2 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni ed eventualmente determinarle.

La matrice dei coefficienti del sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ h & -2 & h+1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e contiene il minore non nullo

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $D(A) = 2h - 6$.
Allora, per tutti i valori reali di h, tranne $h = 3$, il sistema é di Cramer ed ammette l'unica soluzione

$$\left(\frac{D\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ h-2 & -2 & h+1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{2h-6}, \frac{D\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & h-2 & h+1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{2h-6}, \frac{D\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ h & -2 & h-2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{2h-6}\right)$$

Nel caso $h = 3$ la matrice completa del sistema

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, pertanto il sistema é risolubile con insieme delle soluzioni di "dimensione" pari a 1. Si considera il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x - 2y = 1 - z \\ 2x = -3z \end{cases}$$

la cui unica soluzione é $(-\frac{3}{2}z, -\frac{1}{4}z - \frac{1}{2})$. Allora l'insieme delle soluzioni del sistema di partenza, nel caso $h = 3$, é

$$S = \{(-\frac{3}{2}z, -\frac{1}{4}z - \frac{1}{2}, z) |\ z \in R\} = (0, -\frac{1}{2}, 0) + \langle(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, 1)\rangle.$$

[3] Si consideri la retta r ortogonale al piano di equazione $2x+y-z+2 = 0$ e passante per il punto $P(0, 1, 1)$. Determinare equazioni cartesiane della retta passante per l'origine, incidente r ed ortogonale ad essa.

La retta r ha parametri direttori $(2, 1, -1)$, desunti dai parametri di giacitura del piano cui deve essere ortogonale. Le sue equazioni cartesiane sono, ad esempio, date da

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

quindi

$$\begin{cases} x - 2z + 2 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

La retta s cercata appartiene al piano per l'origine ortogonale a r, di equazione

$$2x + y - z = 0$$

ed al piano del fascio di asse r passante per l'origine, il quale ha equazione

$$x + y - z = 0.$$

La retta s ha allora equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

[4] Si scriva un'equazione omogenea della parabola passante per $P(1, 2, 0)$, tangente in $Q(2, 1)$ alla retta $x + y - 3 = 0$ e contenente l'origine.

Consideriamo il fascio di coniche (parabole) bitangenti alla retta $x + y - 3 = 0$ in $Q(2, 1)$ ed alla retta impropria nel punto $P_\infty(1, 2, 0)$. Le coniche degeneri del fascio sono

- una costituita dalla retta impropria e dalla retta data :

$$\mathcal{C}_1 : \ (X + Y - 3T)T = 0,$$

- l'altra costituita dalla retta per Q e P_∞ contata due volte :

$$\mathcal{C}_2 : (2X - Y - 3T)^2 = 0.$$

L'equazione del fascio é allora:

$$(X + Y - 3T)T + k(2X - Y - 3T)^2 = 0.$$

Imponendo alla parabola del fascio di contenere l'origine si ricava $k = \frac{1}{3}$.