FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 13.12.2013

———————————————————————————

1. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento nel piano da $R(O,x,y)$ a $R'(O',x',y')$ e viceversa, sapendo che i due riferimenti sono cartesiani ortogonali ed equiversi, $O'(-2,5)$ e che l'asse x' ha equazione $3x+6y-1=0$ in R, orientato nel verso delle ordinate crescenti.

Il versore dell'asse x' è
$$i'(\frac{-2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}).$$
L'asse y' è la retta per O' ortogonale a x', quindi
$$j'(\frac{1}{\pm\sqrt{5}},\frac{2}{\pm\sqrt{5}}).$$
Si dovrà scegliere il segno negativo poichè i sistemi sono equiversi. Allora
$$\begin{cases} x=-2+\frac{-2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ \\ y=5+\frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{cases}.$$
Risolvendo il sistema di Cramer
$$\begin{cases} \frac{-2}{\sqrt{5}}x'-\frac{1}{\sqrt{5}}y'=2-x \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x'-\frac{2}{\sqrt{5}}y'=-5-y \end{cases},$$
si ottengono le equazioni del cambiamento di riferimento da R a R':
$$\begin{cases} x'=-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{\sqrt{5}}y \\ \\ y'=-\frac{12}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{2}{\sqrt{5}}y \end{cases}.$$

2. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^2 - 3y^2 + 5xy - 3x + 5y - 2 = 0$$

è degenere e determinarne le componenti.

La matrice della conica ha determinante nullo, allora la conica è degenere. Le rette componenti hanno equazioni del tipo

$$2x - y + p = 0, \quad x + 3y + q = 0.$$

Segue che l'equazione della conica si deve anche scrivere come

$$(2x - y + p)(x + 3y + q) = 0.$$

Si ricava $p = 1$ e $q = -2$.

3. Dopo aver verificato che le rette

$$r : \begin{cases} 2x - 2z - 1 = 0 \\ y - 3z + 1 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 2z + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

sono sghembe, determinare la retta di minima distanza.

Le rette sono effettivamente sghembe. Considerati i punti

$$R(t + \frac{1}{2}, 3t - 1, t) \in r \quad \text{et} \quad S(2u - 1, u, u) \in s,$$

si impone l'ortogonalità del vettore $\overline{RS}$ con le rette date e si ricavano i parametri. La retta richiesta è quella per R ed S.

4. Sia $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$L(A) = AB - CA$$

essendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificare che L è lineare e determinarne la matrice rispetto alla base standard $E_{ij},\ i,j = 1,2.$

Si ha

$$L(A + A') = (A + A')B - C(A + A) = ... = L(A) + L(A')$$

ed

$$L(\lambda A) = (\lambda A)B - C(\lambda A) = ... = \lambda L(A).$$

Allora l'applicazione è lineare. Poi:

$$L\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 2E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22},$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 1E_{22},$$

$$L\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_{11} - 1E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}.$$

Allora la matrice di L sulla base standard è

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$