Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 14.01.2019

---

1. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,2,0),(1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$, si determini l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) = A$. Se ne calcoli poi l'immagine. ($\mathcal{C}$ denota la base canonica.)

Dalla formula

$$L(x,y,z) = L(x,y,z)_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)(x,y,z)_{\mathcal{B}},$$

poichè

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = (x-z)(1,1,0) + (\frac{-x+y+z}{2})(0,2,0) + (z)(1,0,1),$$

si ottiene

$$L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-z \\ \frac{-x+y+z}{2} \\ z \end{pmatrix} = \dots$$

2. Determinare l'equazione della retta impropria del piano per il punto $P(2,-1,3)$, parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} x = 3z+1 \\ y = -z+3 \end{cases}$$

e ortogonale al piano $\sigma : 2x - 3y + 4z = 1$.

La stella di piani per il punto P ha equazione

$$a(x-2) + b(y+1) + c(z-3) = 0.$$

La retta r ha parametri direttori $(3, -1, 1)$ ed il piano π ha parametri di giacitura $(2, -3, 4)$. Allora:
- condizione di parallelismo piano/retta : $3a - b + c = 0$,
- condizione di ortogonalità piano/piano : $2a - 3b + 4c = 0$. Facendo sistema si ottiene che il piano cercato ha equazione $x + 10y + 7z - 13 = 0$. Segue che la retta impropria di tale piano ha equazione

$$\begin{cases} X + 10Y + 7Z - 13T = 0 \\ T = 0 \end{cases}.$$

3. Determinare la conica tangente alla circonferenza

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 2x + y + 1 = 0$$

nel punto $P(-1, 0)$, tangente alla retta $r : 3x - y + 1 = 0$ nel suo punto improprio e passante per $Q(2, 2)$. Classificare tale conica.

La tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto $P(-1, 0)$ ha equazione $y = 0$. Il punto improprio della retta r è $R_\infty(1, 3, 0)$. Allora si può costruire il fascio di coniche bitangenti all'asse x in $P(-1, 0)$ ed alla retta r in $R_\infty(1, 3, 0)$. Le coniche degeneri del fascio sono quindi:
- $\mathcal{C}_1 = (retta\ r) \cup (asse\ x)$
- $\mathcal{C}_2 = (retta\ (PR_\infty))^2$

...