Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing. Civile
Appello di GEOMETRIA del 14.09.2018 -

---

1. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

verificare che essa è invertibile e determinarne l'inversa.

A è la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1), (-1,3,1), (0,1,1)\}$$

alla base canonica $\mathcal{C}$. L'inversa di A è allora la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id)$...

2. Considerate le rette

$$r : \begin{cases} x = y + 1 \\ z = -2y + 2 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} y = x \\ z = 3 \end{cases},$$

determinare la retta per $P(1,0,3)$ incidente r, s. Dopo aver verificato che le rette date sono sghembe, determinare la retta di minima distanza.

La retta cercata si ottiene come intersezione di
- piano del fascio di asse r per P,
- piano del fascio di asse s per P.

Le rette date sono sghembe. Si considerano i punti

$$R(t+1, t, -2t+2) \in r, \quad S(v, v, 3) \in S,$$

e si richiede poi che il vettore $\overline{RS}$ sia ortogonale ad entrambe le rette. I valori che si ottengono per i parametri t e v forniscono i punti di minima distanza tra le due rette. La retta cercata è quella per tali punti.

3. Discutere e risolvere il sistema lineare

$$r : \begin{cases} 2(a-1)x + 2y - z = 2(a+1) \\ 2x + 2ay + 2z = 4a^2 + 3 \\ 4ax + 2(2a+1)y + (2a+1)z = 16a^3 - 2a^2 - a + 5 \end{cases}$$

al variare di $a \in R$.

La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante che vale

$$4a(a-1)(2k-1).$$

Allora, per $a \neq 0, 1, \frac{1}{2}$ il sistema è di Cramer e si risolve come al solito (bastava lasciare indicata la terna soluzione).
Per $a = 0$ matrice dei coefficienti e matrice completa hanno entrambe rango 2 e si ha

$$S = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0) + < (-1, -\frac{1}{2}, 1) > .$$

Per $a = 1$, analogamente a sopra si ha

$$S = (\frac{3}{2}, 2, 0) + < (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1) > .$$

Per $a = \frac{1}{2}$ il sistema non ammette soluzioni.