Corso di Laurea Ing. Civile

Primo Test di GEOMETRIA del 13.11.2017
a.a. 2017/18

---

1. Determinare le radici quarte del numero complesso

$$z = \frac{4}{1-i}.$$

Si ha

$$z = \frac{4}{1-i} = \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 2 + 2i,$$

pertanto, nel piano di Gauss, z individuato dal punto di coordinate $(2, 2)$. Segue che l'argomento di z è $\frac{\pi}{4}$, mentre il suo modulo è $\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$. Allora se $x = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ è tale che $r^4 = z$, si deve avere

$$r = \sqrt[4]{\rho} = \sqrt[8]{8} \quad e \quad 4\phi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

cioè

$$\phi = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}, \quad per \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

....

2. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L(x, y, z) = (kx - y + 2z, 2x + ky + kz, -x + kz).$$

Determinare i valori del parametro reale k per cui L risulta invertibile e calcolarne l'inversa. Negli altri casi determinare nucleo ed immagine di L.

L'applicazione data è invertibile se preso comunque un vettore $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ il sistema lineare

$$\begin{cases} kx - y + 2z = a \\ 2x + ky + kz = b \\ -x + kz = c \end{cases}$$

risulta essere di Cramer. Poichè la matrice dei coefficienti ha determinante che vale $k(k^2 + 5)$, ciò accade per tutti i valori reali di k tranne che per $k = 0$. Per ogni $k \neq 0$ l'unica terna soluzione del sistema fornisce la legge dell'applicazione inversa L^{-1}.
Nel caso $k = 0$ si ha

$$L(x, y, z) = (-y + 2z, 2x, -x).$$

Questa ha evidentemente nucleo $Ker\ L =< (0, 2, 1) >$, mentre

$$Im\ L =< (0, 2, -1), (-1, 0, 0), (2, 0, 0) >=< (0, 2, -1), (-1, 0, 0) > .$$

3. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (1, 1, 0), (3, -1, 0)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1, -2), (2, 3)\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Determinare inoltre il nucleo di L.

Si adopera la relazione

$$L(x, y, z)_{\mathcal{B}'} = A\ (x, y, z)_{\mathcal{B}}.$$

Da

$$(x, y, z) = a(1, 2, 1) + b(1, 1, 0) + c(3, -1, 0)$$

si ricava che le coordinate del vettore (x, y, z) sulla base $\mathcal{B}$ sono date da

$$(x, y, z)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \frac{x+3y-7z}{4} \\ \frac{x-y+z}{4} \end{pmatrix} .$$

Allora

$$L(x,y,z)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \frac{x+3y-7z}{4} \\ \frac{x-y+z}{4} \end{pmatrix} = (\frac{-x+3y+11z}{4}, \frac{2x+2y-3z}{2}).$$

Finalmente

$$L(x,y,z) = \frac{-x+3y+11z}{4}(1,-2) + \frac{2x+2y-3z}{2}(2,3) = ...$$