Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 15.09.2014

---

1. Siano

$$B_1 = \{(1,0,-1),(0,2,2),(2,-1,1), \quad B_2 = \{(1,1,1),(0,2,-1),(3,0,3),$$

$$B_3 = \{(1,1),(2,-1)$$

basi di $\mathbb{R}^3$ ed $\mathbb{R}^2$ e siano $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ le applicazioni lineari tali che

$$M_{B_2}^{B_1}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_{B_3}^{B_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinare l'applicazione $T \circ L$ ed il suo nucleo.

Si ha

$$M_{B_3}^{B_1}(T \circ L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

quindi

$$[(T \circ L)(x,y,z)]_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_1},$$

ove $(x,y,z)_{B_1} = (\frac{x+y-z}{2}, \frac{x+3y+z}{8}, \frac{x-y+z}{4})$. Allora

$$[(T \circ L)(x,y,z)]_{B_3} = (-\frac{x+y+z}{2}, -3x+y-z),$$

così
$$(T \circ L)(x,y,z) = -\frac{x+y+z}{2}(1,1) + (-3x+y-z)(2,-1) =$$
$$= (\frac{-13x+3y-5z}{2}, \frac{5x-3y+z}{2}).$$
Rimane da risolvere il sistema lineare omogeneo
$$\begin{cases} -13x+3y-5z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases} .$$

2. Sia $R'(O', x', y', z')$ il sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui gli assi y', z' hanno in $R(O,x,y,z)$ rispettivamente equazioni
$$y' : \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=1 \end{cases}, \quad z' : \begin{cases} x+z=1 \\ y-z=2 \end{cases},$$
il primo orientato nel verso delle x decrescenti, il secondo nel verso delle y crescenti. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da R ad R' e viceversa, essendo i riferimenti equiversi.

I parametri direttori di y' e z' sono rispettivalente $(1,2,-1)$ e$(1,-1,-1)$, pertanto
$$j' = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \qquad k' = (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$
Si ha poi $O' = y' \cap z' = (1,2,0)$, così l'asse x' è la retta per O' ortogonale a y' e z', cioè
$$x' : \begin{cases} x-z=1 \\ y=2 \end{cases}$$
da cui
$$i' = (\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}).$$
Poichè la matrice
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ha determinante 1 allora...

3. Considerata la conica di equazione

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - kx + k = 0$$

determinare i valori del parametro reale k per cui la curva è riducibile e, nel caso, trovarne le componenti.

La matrice della conica è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{k}{2} \\ -1 & 2 & 0 \\ -\frac{k}{2} & 0 & k \end{pmatrix},$$

pertanto essa è degenere per $k = 0$ e $k = -2$.
Nel caso $k = 0$ si ha

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = [y - (1+i)x][y - (1-i)x]$$

pertanto la conica è composta da due rette immaginarie e coniugate. Per $k = 2$...