Geo1.aux Geo1.aux Geo1.aux

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA DEL 15.11.2016

———————————————————————————

1. Determinare le radici terze del numero complesso $z = 1 - i$.

Nel piano di Gauss z corrisponde al punto di coordinate $(1, -1)$, pertanto il suo modulo vale $\sqrt{2}$, mentre il suo argomento è pari a $-\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$. Allora

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi).$$

Se $x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $x^3 = z$, si deve avere

$$\rho^3 = \sqrt{2}, \qquad 3\theta = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2,$$

ovvero

$$\rho = 2^{\frac{1}{6}}, \qquad \theta = \frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Le tre radici terze di z sono allora i numeri complessi

$$x_0 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi),$$

$$x_1 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos\frac{15}{12}\pi + i\sin\frac{15}{12}\pi),$$

$$x_1 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos\frac{23}{12}\pi + i\sin\frac{23}{12}\pi).$$

2. Determinare se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tale che

$$L(1,1,1) = (3,0), \quad L(0,2,-1) = (0,3),$$

$$L(2,0,0) = (0,0), \quad L(1,0,1) = (3,1).$$

I vettori $(1,1,1), (0,2,-1), (2,0,0)$ costituiscono una base per $\mathbb{R}^3$, pertanto esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tale che

$$L(1,1,1) = (3,0), \quad L(0,2,-1) = (0,3), \quad L(2,0,0) = (0,0).$$

Da

$$(x,y,z) = \frac{y+2z}{3}(1,1,1) + \frac{y-z}{3}(0,2,-1) + \frac{3x-y-2z}{6}(2,0,0)$$

segue, per linearità

$$L(x,y,z) = \frac{y+2z}{3}(3,0) + \frac{y-z}{3}(0,3) + \frac{3x-y-2z}{6}(0,0) =$$

$$= (y+2z, y-z).$$

Poichè $L(1,0,1) = (2,-1)$, l'applicazione cercata non esiste.

3. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$L(x,y,z) = (2x+y, y-z, x+z),$$

si provi che essa è un isomorfismo e se ne determini l'inversa.

Il nucleo di L coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ y-z=0 \\ x+z=0 \end{cases},$$

che consta del solo vettore nullo. Allora L è iniettiva e, per ragioni di dimensione, anche suriettiva. Pertanto L è un isomorfismo lineare. Dato un vettore $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ esiste quindi un unico vettore $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tale che $L(x,y,z) = (a,b,c)$. Per determinarlo basta risolvere il sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ y - z = b \\ x + z = c \end{cases} .$$

Esso ammette come unica soluzione la terna $(a-b-c, -a+2b+2c, -a+b+2c)$. Segue che $L^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita da

$$L^{-1}(x,y,z) = (x - y - z, -x + 2y + 2z, -x + y + 2z).$$

4. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -x + y = k \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} ,$$

al variare del parametro reale k.

La matrice completa del sistema ha determinante che vale $8k-1$. Poichè la matrice dei coefficienti ha rango 2, si ha che il sistema dato non ha soluzioni per tutti i valori reali $k \neq \frac{1}{8}$. Se invece $k = \frac{1}{8}$ il sistema è risolubile ed equivalente al sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} .$$