Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Appello di GEOMETRIA del 16.02.2017

———————————————————————

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$L(1,1,1) = (1,0,1,0),\ L(2,0,1) = (0,-1,1,0),\ L(1,0,0) = (2,0,2,0).$$

e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ ed alla base $B = \{(1,1,1),(0,0,2),(1,-1,0)\}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare nucleo ed immagine della composizione $T \circ L$.

Per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$(x,y,z) = y(1,1,1) + (z-y)(2,0,1) + (x+y-2z)(1,0,0),$$

quindi

$$L(x,y,z) = y(1,0,1,0) + (z-y)(0,-1,1,0) + (x+y-2z)(2,0,2,0) =$$

$$= (2x+3y-4z, y-z, 2x+2y-3z, 0).$$

Si ha poi

$$T(x,y,z,t)_B = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (x+z-t, z, -x+y-t),$$

allora

$$T(x,y,z,t) = (x+z-t)(1,1,1) + z(0,0,2) + (-x+y-t)(1,-1,0) =$$

$$= (y + z - 2t, 2x - y + z, x + 3z - t).$$

Segue

$$(T \circ L)(x, y, z) = (4x + 5y - 7z, 6x + 7y - 10z, 8x + 9y - 13z).$$

...

2. Considerata la conica di equazione

$$x^2 - 2y^2 + xy - x + 4y - 2 = 0 \ ,$$

provare che essa è semplicemente degenere e determinarne il punto doppio.

La matrice della conica

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ha evidentemente rango 2, quindi la conica è semplicemente degenere ed ha un unico punto doppio le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema delle derivate parziali prime del polinomio che definisce la conica:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

...

3. Nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale $R(O, x, y, z)$ siano date le rette

$$x' : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z + 2 \end{cases} , \quad y' : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} ,$$

la prima orientata nel verso delle x crescenti e la seconda nel verso delle z decrescenti. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da $R(O, x, y, z)$ a $R'(O', x', y', z')$ e viceversa, sapendo che i due riferimenti sono contraversi.

Per quanto riguarda i parametri direttori si ha:

$$x'(2,-1,1) \quad \text{ed} \quad y'(1,1,-1),$$

(nota che x' ed y' sono ortogonali) allora, dati gli orientamenti, risulta

$$i'(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}) \quad \text{ed} \quad j'(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Posto $z'(l,m,n)$, le condizioni di ortogonalità con gli altri assi forniscono il sistema

$$\begin{cases} 2l-m+n=0 \\ l+m-n=0 \end{cases}$$

dal che si ricava

$$k'(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Affinchè le terne (i,j,k) e (i',j',k') siano contraverse si riconosce che deve essere $k'(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poichè $x'\cap y'=O'(1,2,0)$, si ha

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

...