Dipartimento di di Ingegneria Civile e Ambientale

Corso di Laurea Ing.Civile

Appello di GEOMETRIA del 16.06.2014

Soluzioni proposte

———————————————————————————

1. Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$Ker\, L =< (0,1,1),(2,0,0) > \quad \text{e} \quad Im\, L =< (1,-1,1) > .$$

L'pplicazione lineare cercata deve essere tale che

$$L(0,1,1) = (0,0,0), \quad L(2,0,0) = (0,0,0).$$

Consideriamo la base di $\mathbb{R}^3$ costituita, ad es., dai vettori

$$(0,1,1),\ (2,0,0),\ (1,1,0).$$

Allora esiste unica l'applicazione lineare L che, oltre a soddisfare le due richieste precedenti, soddisfa anche $L(1,1,0) = (1,-1,1)$.
Per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$(x,y,z) = z(0,1,1) + \frac{x-y+z}{2}(2,0,0) + (y-z)(1,1,0),$$

$$L(x,y,z) = zL(0,1,1) + \frac{x-y+z}{2}L(2,0,0) + (y-z)L(1,1,0).$$

Allora

$$L(x,y,z) = (y-z)(1,-1,1) = (y-z,-y+z,y-z).$$

2. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano equiverso, quando si passa dal riferimento $R = (O,x,y,z)$ al riferimento $R' = (O',x',y',z')$, e viceversa, essendo

$$x' : x = -2z, \quad y = 1,$$

$$y' : x - y = 0, \quad x + y - z + 2 = 0,$$

la prima retta orientata nel verso delle x crescenti, la seconda nel verso delle z decrescenti, con $O'(1, -1, 0)$.

I parametri direttori degli assi x' ed y' sono rispettivamente:

$$(-2, 0, 1) \quad \text{e} \quad (1, 1, 2),$$

allora l'asse z' avrà parametri direttori $(l, m, n,)$ che si ottengono da

$$\begin{cases} -2l + n = 0 \\ l + m + 2n = 0 \end{cases},$$

cioè $(1, -5, 2)$.
Per i versori degli assi coordinati di R' si ha allora

$$i' = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}),\ j' = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}),\ k' = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}})$$

tenendo conto dell'orientamento e del fatto che i riferimenti sono equiversi.
Infine

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{30}}z' \\ y = -1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{5}{\sqrt{30}}z' \\ z = -\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{2}{\sqrt{30}}z' \end{cases}.$$

Per trovare le equazioni del cambiamento di riferimento da R a R' basta risolvere il sistema di Cramer

$$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{30}}z' = x - 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{5}{\sqrt{30}}z' = y + 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{6}}y' - \frac{2}{\sqrt{30}}z' = z \end{cases},$$

nelle incognite x', y', z'.

3. Provare che la conica

$$\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + y - 3 = 0$$

è degenere e trovarne le componenti.

La conica è effettivamente degenere poichè la sua matrice ha determinante nullo.
Si ha

$$x^2 + 2y^2 + 3xy = (x + 2y)(x + y),$$

pertanto la conica si decompone in due rette aventi equazione del tipo

$$x + 2y + p = 0, \qquad x + y + q = 0.$$

Da

$$x^2 + 2y^2 + 3xy + 2x + y - 3 = (x + 2y + p)(x + y + q)$$

si ricava $p = 3$, $q = -1$.