Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 16.06.2015

---

1. Considerate le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix},$$

si determinino le applicazioni lineari da esse, rispettivamente, definite e se ne studi la composizione.

Le applicazioni $L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sono definite come segue:

$$L_A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y, -y, x+3y),$$

$$L_B(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x-y, 4y-2z).$$

da Studiamo, ad es., la composizione

$$L_A \circ L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Si ha

$$(L_A \circ L_B)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 2 & 11 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2x+7y-4z, -4y+2z, 2x+11y-6z).$$

Si ha:

$$Im\ L =< (2,0,2),(7,-4,11),(-4,2,-6) >,$$

$$Ker\ L = \{(x,y,z) \mid (2x+7y-4z, -4y+2z, 2x+11y-6z) = \overline{0}\}.$$

....

2. Decomporre il vettore $v = (2,1,3)$ secondo le direzioni delle rette di equazioni

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Determinare inoltre il versore u ortogonale a v ed a $w = (0,-1,1)$, orientato in modo che la terna u, v, w sia contraversa rispetto alla base ortonormale.

Le rette date sono parallele, rispettivamente, ai vettori $(1,1,1)$, $(3,-5,1)$, $(-2,2,1)$. Poniamo

$$v = (2,1,3) = x(1,1,1) + y(3,-5,1) + z(-2,2,1),$$

da cui si ricava il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 2 \\ x - 5y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases},$$

la cui soluzione è $(\frac{31}{16}, \frac{7}{16}, \frac{10}{16})$. Allora

$$v = \frac{31}{16}(1,1,1) + \frac{7}{16}(3,-5,1) + \frac{10}{16}(-2,2,1).$$

Il versore

$$u = (a,b,c)$$

deve soddisfare le seguenti relazioni

$$\begin{cases} 2a + b + 3c = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases},$$

pertanto $u = (-2t, t, t),\ \ t \in \mathbb{R}$. Dovendo poi u avere modulo unitario:

$$6t^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\pm\sqrt{6}},$$

quindi

$$u = (\frac{-2}{\pm\sqrt{6}}, \frac{1}{\pm\sqrt{6}}, \frac{1}{\pm\sqrt{6}}).$$

Si dovrà scegliere il segno della radice che renderà negativo il determinante delle coordinate dei tre vettori.

3. Studiare la curva algebrica di equazione

$$x^3 - xy^2 - y - 1 = 0$$

nei suoi punti impropri e nei punti di intersezione con gli assi coordinati.

I punti impropri della curva sono quelli delle rette di equazione complessiva

$$x^3 - xy^2 = x(x+y)(x-y),$$

cioè Y_∞, $P_\infty(1, -1, 0)$, $Q_\infty(1, 1, 0)$. La curva interseca gli assi nei punti $A(0, J1)$ et $B(1, 0)$. si devono pertanto studiare questi cinque punti... routine.