Prova Scritta di

GEOMETRIA

del 16.12.2009

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

1. Discutere ed eventualmente risolvere, al variare del parametro reale k, il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + ky + kz = 0 \\ x - 2ky + (2-k)z = 1 \end{cases}$$

2. Considerata la curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^5 - 3x^4y + 2x^2y - xy^2 + y^3 = 0,$$

studiarla in uno dei suoi punti impropri e nell'origine.

3. Considerata l'applicazione lineare

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3, \quad L(x, y, z) = (x + y - z, y - z, x + z),$$

determinarne la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(L)$, essendo $\mathcal{C}$ la base canonica e

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, 0), (2, -1, -1), (0, 3, 1)\}.$$

4. Dopo aver verificato che le rette r, s di equazioni rispettive

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -z + 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -z + 2 \\ x + y = 1 \end{cases},$$

sono sghembe, determinare la loro minima distanza.

Soluzioni Proposte

1. La matrice completa del sistema ha sempre rango pari a 2.
La matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 2 & k & k \\ 1 & -2k & 2-k \end{pmatrix}$$

ha rango determinato dai minori

$$\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & -2k \end{pmatrix} \qquad \text{ed} \qquad \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 2-k \end{pmatrix}$$

con determinante, rispettivamente, $-5k$ e $4-3k$. Allora, qualunque sia il valore del parametro k, anche la matrice dei coefficienti ha brango 2. Quindi il sistema è sempre risolubile.
Si riscrive, ad es., il sistema di partenza come

$$\begin{cases} 2x + ky = -kz \\ x - 2ky = 1 - (2-k)z \end{cases}$$

il quale ha un'unica soluzione in funzione di z, quindi ...

2. L'equazione complessiva delle rette per l'origine aventi la direzione dei punti impropri di $\mathcal{C}$ è

$$x^5 - 3x^4y = x^4(x-3y) = 0.$$

Allora i punti impropri sono $Y_\infty(0,1,0)$, contato quattro volte, e $P_\infty(3,1,0)$.
La generica retta per Y_∞ di equazione $x = k$ ha intersezioni con $\mathcal{C}$ nei punti di ordinata che si ricava da

$$y^3 - ky^2 + (3k^4 + 2k^2)y + k^5 = 0.$$

Si ottiene allora che Y_∞ è un punto doppio. Poichè noin ci sono rette proprie che abbiano molteplicità di intersezione in Y_∞ maggiore di 2, segue che le tangenti in tale punto coincidono con la retta impropria.
La generica retta per l'origine ha equazione $y = mx$ e le sue intersezioni con la curva hanno ascissa determinata da

$$x^5 - 3mx^5 + 2mx^3 - m^2x^3 + m^3x^3 = x^3[(1-3m)x^2 + m^3 - m^2 + 2m] = 0.$$

Si ricava che l'origine è un punto triplo per la curva. Le sue tre tangenti sono le rette $y = mx$ che hanno più di tre intersezioni riunite nell'origine. Ciò avviene per i valori di m per cui

$$m^3 - m^2 + 2m = m(m^2 - m + 2) = 0,$$

ovvero per $m = 0$ ed $m = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

3. Si ha

$L(1,0,0) = (1,0,1) = \frac{4}{3}(1,-2,0) - \frac{1}{6}(2,-1,-1) + \frac{5}{6}(0,3,1).$

$L(0,1,0) = (1,1,0) = 0(1,-2,0) + \frac{1}{2}(2,-1,-1) + \frac{1}{2}(0,3,1),$

$L(0,0,1) = (-1,-1,1) = 1(1,-2,0) - 1(2,-1,-1) + 0(0,3,1).$

Allora la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Si ha

$$D\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0\ ,$$

pertanto le due rette date sono effettivamente sghembe.
Il piano generico di asse r ha equazione

$$kx + y + (1-2k)z - 2 = 0,$$

imponendo il parallelismo con la retta s avente parametri direttori $(1,-1,-1)$ si ottiene $3k - 2 = 0$, cioè $k = \frac{2}{3}$, quindi il piano π parallelo ad s contenente la retta r, di equazione $2x + 3y - z - 6 = 0$. La minima distanza tra le due rette si ottiene prendendo un qualunque punto di s, ad es, $S(2,-1,0)$ e calcolando la sua distanza da tale piano, in formula:

$$d(S,\pi) = |\frac{4-3-6}{\sqrt{14}}| = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$