

**FACOLTÀ di INGEGNERIA**  
**Soluzioni proposte della**  
**Prova Scritta di GEOMETRIA del 17 Luglio 2008**  
**Corsi di laurea: Civile**

[1] Determinare il rango della matrice associata all'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4,$$

definita da

$$L(x, y, z) = (2x - z, y + 2z, x - y - z, y + 3z),$$

rispetto alla base  $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, -1, 2), (3, 2, -1)\}$  di  $\mathbb{R}^3$  ed alla base canonica di  $\mathbb{R}^4$ . Dal risultato dedurre l'iniettività di  $L$ .

---

Detta  $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^4$ , si ha

$$\begin{aligned} - L(1, 1, 1) &= (1, 3, -1, 4) = 1e_1 + 3e_2 - 1e_3 + 4e_4 \\ - L(0, -1, 2) &= (-2, 3, -1, 5) = -2e_1 + 3e_2 - 1e_3 + 5e_4 \\ - L(3, 2, -1) &= (7, 0, 2, -1) = 7e_1 + 0e_2 + 2e_3 - 1e_4 \end{aligned}$$

Allora

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango pari a 3, fornito, ad es., dalle prime tre righe. Segue che i tre vettori  $(1, 3, -1, 4)$ ,  $(-2, 3, -1, 5)$ ,  $(7, 0, 2, -1)$  sono linearmente indipendenti e costituiscono una base per  $ImL$ . Dalla formula di Grassmann si ottiene quindi che  $KerL = \{0\}$  e l'applicazione é iniettiva.

[2] Considerata la retta  $r$  di equazioni

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ z - 2y - 4 = 0 \end{cases}$$

determinare se esistono punti di  $r$  che hanno distanza pari a  $\sqrt{26}$  dal punto  $P(1, -1, 1)$ .