SOLUZIONI
della Prova Scritta di
GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 18.02.2009

1. Determinare i valori del parametro reale k per cui l'applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^4$ definita da

$$L(x, y, z,) = (2x + ky - z, x - y - kz, ky - kz, x + kz),$$

risulta iniettiva.

Il nucleo dell'applicazione coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 0 \\ x - y - kz = 0 \\ ky - kz = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti

$$M = \begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & -1 & -k \\ 0 & k & -k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix},$$

contiene il minore non nullo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

allora il suo rango si ricaverá considerando le due matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & k & -1 \\ 1 & -1 & -k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -k \\ 0 & k & -k \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Il determinante della prima matrice vale $-2k^2 - 2k - 1$ e non si annulla per nessun valore del parametro. Segue che la matrice dei coefficienti del sistema ha sempre rango 3. Si puó allora concludere che l'applicazione L é sempre iniettiva.

2. Studiare la curca algebrica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 + 2y^2 - 2x = 0$$

nei suoi punti impropri.

Si ha

$$x^3 - 2x^2y + xy^2 = x(x-y)^2,$$

allora i punti impropri della curva sono $Y_\infty(0,1,0)$ e $P_\infty(1,1,0)$ contato due volte. La retta generica per Y_∞ ha equazione $x = k$. Intersecandola con la curva si ottiene

$$(k+2)y^2 - 2k^2y + k^3 - 2k = 0,$$

quindi ci sono sempre due intersezioni proprie ed una sola in Y_∞, il quale risulta pertanto un punto semplice. La tangente alla curva in Y_∞ é la retta di equazione $x = -2$, infatti per $k = -2$ l'equazione precedente si abbassa di grado.
La retta generica per P_∞ ha equazione $y = x + h$. Intersecandola con la curva si ottiene

$$2x^2 + (h^2 + 4k - 2)x + 2h^2 = 0.$$

Anche in questo caso ci sono sempre due intersezioni proprie ed una sola in P_∞, qualunque sia il valore di h. Segue che P_∞ é un punto semplice e che la retta tangente in tale punto deve essere la retta impropria.

3. Determinare la retta s per il punto $P(2,-1,0)$ complanare con la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

e con la retta impropria del piano $\pi : 3x - y + 3z - 2 = 0$.

La retta cercata si ottiene come intersezione del piano per P ed r e del piano per P contenente la retta impropria di π di equazioni omogenee

$$\begin{cases} 3X - Y + 3Z - 2T = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

Si costruiscono i piani dei fasci definiti da ciascuna delle due rette e passanti entrambi per P. La retta cercata é allora quella di equazioni

$$\begin{cases} 3x - y + 3z - 7 = 0 \\ 3x + y - 5z - 5 = 0 \end{cases}$$

4. Sia $R(O, x, y)$ un riferimento cartesiano ortogonale nel piano e sia $R'(O', x', y')$ il riferimento ortogonale equiverso con il precedente e tale che $O'(2, 3)$ e $x' : x - y + 1 = 0$, orientata nel verso delle ascisse crescenti. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da R' ad R.

La retta x' ha parametri direttori $(1, 1, 0)$, cosí i suoi possibili versori hanno coordinate $(\frac{1}{\pm\sqrt{2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{2}}, 0)$. Dovendo la retta essere orientata nel verso delle ascisse crescenti, il suo versore é $i'(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. L'asse y' é la retta per O' ortogonale ad x', cioé $y' : x + y - 5 = 0$. Con ragionamento analogo a sopra, le possibili scelte per il versore di y' sono $j'(\frac{1}{\pm\sqrt{2}}, \frac{-1}{\pm\sqrt{2}}, 0)$. Si hanno due possibili matrici per il cambiamento di base da $\{i', j'\}$ a $\{i, j\}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Poiché i due sistemi devono essere equiversi si sceglierá la seconda che ha determinante pari a 1. Allora $j'(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Segue che le equazioni del cambiamento di riferimento sono date da

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{cases} \qquad .$$